

5. Классическое определение вероятности

▷ Вероятностью подмножества A конечного множества M называется число

$$P(A) = P_M(A) := |A|/|M|.$$

Далее, если не оговорено противное, множество M фиксировано и пропускается из обозначений. Тогда вероятность определена для всех его подмножеств. Их часто называют *событиями*.

Задача 5.1. Из колоды в 52 карты вытаскивается одна карта. Найдите вероятность того, что она окажется

а) чёрной масти; б) тузом; в) картинкой; г) дамой пик; д) королём или бубной.

Задача 5.2. Монета бросается 3 раза. Найдите вероятность выпадения

а) трёх орлов; б) двух орлов и решки.

Задача 5.3. Найдите вероятность того, что при бросании двух игральных костей

а) на первой выпадет больше очков, чем на второй;

б) сумма выпавших очков составит 2, 3, ..., 12.

Задача 5.4. Найдите вероятность того, что случайное целое число от 1 до n делится на k :

а) $n = 105$, $k = 5$; б) $n = 105$, $k = 7$; в) $n = 105$, $k = 35$;

г) $n = 100$, $k = 5$; д) $n = 100$, $k = 7$; е) $n = 100$, $k = 35$.

Задача 5.5. а) **Правило сложения.** Пусть $A \cap B = \emptyset$. Выразите $P(A \cup B)$ через $P(A)$ и $P(B)$.

б) Выразите вероятность $P(A \cup B)$ через $P(A)$, $P(B)$ и $P(A \cap B)$.

в) **Правило умножения.** Пусть $A \subseteq M$ и $B \subseteq N$. Выразите вероятность $P_{M \times N}(A \times B)$ через $P_M(A)$ и $P_N(B)$.

▷ Подмножества (т.е. события) A и $B \neq \emptyset$ конечного множества M *независимы*, если $P_M(A) = P_B(A \cap B)$. Приведём симметричную переформулировку, которая работает и для $B = \emptyset$. Подмножества A и B конечного множества M называются *независимыми*, если

$$|A \cap B| \cdot |M| = |A| \cdot |B|.$$

Задача 5.6. Зависимы ли следующие подмножества? (Мы называем *зависимыми* подмножества, не являющиеся независимыми.)

а) Подмножества $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ и $\{1, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$.

б) Подмножества $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и $\{1, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Задача 5.7. Зависимы ли следующие подмножества множества целых чисел от 1 до 105?

а) Подмножество чисел, делящихся на 5, и подмножество чисел, делящихся на 7.

б) Подмножество чисел, делящихся на 15, и подмножество чисел, делящихся на 21.

в) Подмножество чисел, делящихся на 15, и подмножество чисел, делящихся на 5.

г) Подмножество чисел, делящихся на 10, и подмножество чисел, делящихся на 7.