8. Математическое ожидание

Задача 8.1. а) Монета подбрасывается 5 раз. Для каждого $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ найдите вероятность того, что выпало k орлов.

б) Федя знает ответы на 20 из 30 вопросов. В билет входят 3 вопроса. Для каждого $k = 0, 1, 2, 3$ найдите вероятность того, что Федя сможет ответить на k вопросов.

▷ Пусть дано конечное или счётное множество M и для каждого элемента $m \in M$ задано число (вероятность) $P(m) \geq 0$, причем $\sum\limits_{m \in M} P(m) = 1$. *Случайной величиной* называется функция $\xi : M \to Y$ (обычно $Y = \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \ldots$ — числовое множество). *Распределением* случайной величины ξ называется функция $p_\xi : Y \to [0, 1]$, заданная формулой

$$p_\xi(y) := \sum_{\xi(m)=y} P(m).$$

▷ Как правило, при изучении случайной величины не требуется знать, на каком множестве она определена. Достаточно знать только её распределение.
Если $Y = \mathbb{R}$, то *функцией распределения* называется функция $F_\xi : Y \to [0, 1]$, заданная формулой $F_\xi(y) := \sum\limits_{\xi(m)<y} P(m)$.

Задача 8.2. а) Вам предлагается такая игра. Вы платите 2 конфеты, затем бросается игральная кость, и вы получаете столько конфет, сколько очков выпадает. Выгодна ли вам эта игра?

б) Правила те же, только в случае выпадения 1 очка вы платите 100 конфет. (У вас достаточно конфет, чтобы заплатить.) Выгодна ли вам эта игра?

в) Вы кладете в банк 8 конфет, после чего бросается игральная кость. Если выпадает 2, 3 или 4 очка, то вы получаете назад свой вклад плюс еще 1 конфету вдобавок. Если выпадает 5 или 6 очков («рост рынка»), то вы получите даже плюс 2 конфеты вдобавок. А если выпадет 1 очко, то это «кризис», и вы теряете весь свой вклад. Выгодна ли вам эта игра?

Задача 8.3. а) *(Cherchez la femme.)* На русско-французской встрече не было представителей других стран. Суммарное количество денег у французов оказалось больше суммарного количества денег у русских, и суммарное количество денег у женщин оказалось больше суммарного количества денег у мужчин. Обязательно ли на встрече была француженка?

б) Денежные купюры разного достоинства и разных стран упакованы в два чемодана. Средняя стоимость купюры равна 100 рублям. Общее число купюр в левом чемодане больше, чем в правом. Обязательно ли в левом чемодане найдется купюра стоимостью не более 200 рублей?

▷ *Математическим ожиданием* или *средним значением* случайной величины $\xi : M \to Y$ называется сумма

$$\mathbb{E}\,\xi := \sum_{m \in M} \xi(m) P(m).$$

Комментарий. Если множество M бесконечно, то это определение нуждается в уточнении. Сумма ряда в правой части называется *математическим ожиданием*, только когда этот ряд сходится абсолютно. В противном случае говорят, что у случайной величины *не существует математического ожидания.* В дальнейшем мы предполагаем, что для всех рассматриваемых случайных величин математические ожидания существуют.

Задача 8.4. Пусть $\xi : M \to \mathbb{R}$ — случайная величина и $a \in \mathbb{R}$.
а) Пусть $\xi(m) = a$ для любого $m \in M$. Найдите $\mathbb{E}\,\xi$.
б) Если $\mathbb{E}\,\xi \leq a$, то существует $m \in M$, для которого $\xi(m) \leq a$.
в) *Неравенство Маркова.* $P(|\xi| > a) \leq \mathbb{E}\,|\xi|/a$ для любого $a > 0$. (Здесь через $|\xi| > a$ сокращённо обозначено событие $\xi^{-1}(a, +\infty)$.)

Задача 8.5. а) В задаче 8.1 а) найдите среднее значение количества выпавших орлов.
б) В задаче 8.1 б) найдите среднее число правильных ответов.
в) В схеме Бернулли из n испытаний с вероятностью успеха p найдите среднее значение числа успехов.

Задача 8.6. Пусть $\xi, \eta : M \to \mathbb{R}$ — случайные величины.
а) $\mathbb{E}(a\xi) = a\,\mathbb{E}\,\xi$ для любого $a \in \mathbb{R}$.
б) $\mathbb{E}(\xi + \eta) = \mathbb{E}\,\xi + \mathbb{E}\,\eta$.
в) $\mathbb{E}\,\xi = \sum\limits_{y \in Y} y p_\xi(y)$.

Задача 8.7. Найдите
а) наиболее вероятное; б) среднее
число бросков кубика до появления первой шестерки.

Задача 8.8. Кубик бросается до первого появления числа, меньшего 6, но не более четырёх раз. Найдите среднее число бросков.

Задача 8.9. а) (Загадка) Можно ли выразить $\mathbb{E}(\xi\eta)$ через $\mathbb{E}\,\xi$ и $\mathbb{E}\,\eta$?
б) *Неравенство Коши-Буняковского.* Если $\xi(m), \eta(m) \geq 0$ для любого $m \in M$, то $\big(\mathbb{E}(\xi\eta)\big)^2 \leq \mathbb{E}\,\xi^2\,\mathbb{E}\,\eta^2$.

▷ Событие $\xi^{-1}(y) = \{m \in M \colon \xi(m) = y\}$ в дальнейшем сокращённо обозначается $\xi = y$. Случайные величины ξ и η называются *независимыми*, если события $\xi = x$ и $\eta = y$ независимы при любых $x, y \in Y$, т. е.

$$P(m \in M \colon \xi(m) = x \text{ и } \eta(m) = y) = p_\xi(x) p_\eta(y).$$

Неформально независимость означает, что значения одной из случайных величин не влияют на распределение другой. Например, для схемы Бернулли любые две из определённых на множестве $\{0, 1\}^n$ случайных величин $\xi_i(x_1, \ldots, x_n) := x_i$, $i = 1, \ldots, n$, независимы.
в) Докажите, что если случайные величины ξ и η независимы, то математическое ожидание их произведения равно произведению их математических ожиданий: $\mathbb{E}\,\xi\eta = \mathbb{E}\,\xi\,\mathbb{E}\,\eta$.