9. Дисперсия и ее применение

▷ *Дисперсией* случайной величины ξ называется число

$$\mathbb{D}\,\xi = \mathbb{E}\left((\xi - \mathbb{E}\,\xi)^2\right).$$

▷ Если множество значений случайной величины бесконечно, то дисперсия может не существовать. В дальнейшем предполагается, что для всех рассматриваемых случайных величин дисперсия существует.

Задача 9.1. а) Найдите дисперсию числа успехов для схемы Бернулли из n испытаний с вероятностью успеха p.

б) Для любой случайной величины ξ выполнено $\mathbb{D}\,\xi = \mathbb{E}\,\xi^2 - (\mathbb{E}\,\xi)^2$.

в) Для любых ли случайных величины ξ, η выполнено $\mathbb{D}(\xi + \eta) = \mathbb{D}\,\xi + \mathbb{D}\,\eta$?

г) Для любых независимых случайных величины ξ, η выполнено $\mathbb{D}(\xi+\eta) = \mathbb{D}\,\xi+\mathbb{D}\,\eta$.

Задача 9.2. Кооператив отгружает железные балки. Средняя длина балки 3 м, дисперсия 0,09 м^2. Сколько балок надо заказать, чтобы с вероятностью, не меньшей чем 0,999, хотя бы 1000 из них имели длину не менее 2 м?

Задача 9.3. а) **(Неравенство Чебышёва.)** Для любой случайной величины ξ и любого $t > 0$ выполнено

$$P\big(|\xi - \mathbb{E}\,\xi| \geq t\big) \leq \mathbb{D}\,\xi/t^2.$$

б) **(Закон больших чисел.)** Обозначим через ξ число успехов в схеме Бернулли из n испытаний с вероятностью успеха p. Для любого $t > 0$ выполнено

$$P\big(|\xi - np| \geq t\big) \leq np(1-p)/t^2$$

Задача 9.4. Старик ловил неводом рыбу ровно тридцать лет и три года. Каждый день он ловил ровно 7 рыб, которых как раз хватало на ужин. Живущий у старухи кот-долгожитель ест только макрель, которая ловится вдвое реже остальных рыб. Обозначим через p вероятность того, что число голодных дней кота меньше 1000. Докажите, что

а) если макрель плавает поодиночке, то $p > 0.99$;

б) если макрель плавает косяками, то $p < 0.0001$.