7. Условная вероятность

Задача 7.1. Федя знает ответы на 10 вопросов из 30. Билет состоит из двух вопросов. С какой вероятностью Федя ответит на оба вопроса?

Задача 7.2. а) В ящике лежат красные и чёрные носки. Какое минимальное количество носков может быть в ящике, если вероятность того, что два случайно вытянутых носка красные, равна $1/2$?

б) То же, если дополнительно известно, что число чёрных носков чётно.

Задача 7.3*. а) С какой вероятностью треугольник, образованный тремя случайными вершинами правильного $2n$-угольника, будет прямоугольным; остроугольным; тупоугольным?

б) Найдите пределы полученных вероятностей при $n \to \infty$. Подумайте о смысле полученных результатов.

▷ Следующая задача — одна из тех, что положили начало теории вероятностей. В XVII в. её предложил великому французскому математику Блезу Паскалю его знакомый — один из тех дворян, о которых говорится в задаче. Паскаль понял, что следует поделить деньги пропорционально шансам, которые имели игроки на окончательную победу в момент остановки игры.

Задача 7.4. Два дворянина из свиты короля в ожидании выхода его Величества решили сыграть в кости. Они сделали одинаковые ставки и договорились, что тот, кто первым выиграет 10 партий, получает все деньги. При счёте 9:8 появился король и игру пришлось закончить. Как следует поделить деньги?

▷ *Условной вероятностью* подмножества A при условии подмножества B, для которого $P(B) \neq 0$, называется отношение

$$P(A|B) = P(A \cap B)/P(B).$$

(Это определение годится для любого из рассмотренных определений вероятности.) Независимость подмножеств A и B равносильна тому, что $P(A|B) = P(A)$.

Задача 7.5. а) Известно, что при броске игральной кости выпало чётное число. Найдите вероятность того, что оно меньше 5.

б) **(Парадокс мальчика и девочки.)** В семье два ребёнка. Известно, что один из них мальчик. Найдите вероятность того, что второй ребёнок тоже мальчик. (Мы предполагаем, что вероятности рождения мальчика и девочки равны половине и что пол второго ребёнка не зависит от пола первого.)

Задача 7.6. а) Лампочки выпускаются двумя заводами, причём первый из них производит 70 % всей продукции. Лампочки, произведённые первым заводом, горят с вероятностью 0,98, вторым — 0,95. Найдите вероятность того, что купленная лампочка горит.

б) **(Формула полной вероятности.)** Если $P : M \to [0,1]$ — вероятностная функция, $M = B_1 \sqcup \ldots \sqcup B_n$ и $P(B_j) \neq 0$ (говорят, что $B_1, \ldots, B_n$ — *полная система событий*), то

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + \ldots + P(A|B_n)P(B_n).$$

Задача 7.7. а) Лампочки выпускаются двумя заводами, причём первый из них производит 70 % всей продукции. Лампочки, произведённые первым заводом, горят с вероятностью 0,98, вторым — 0,95. Купленная лампочка оказалась бракованной. Найдите вероятность того, что она выпущена первым заводом.

б) **(Формула Байеса.)** Для любых вероятностной функции $P : M \to [0,1]$ и подмножеств $A, B \subset M$ выполнено $P(B|A) = P(A|B)P(B)/P(A)$.

▷ Часто применяется следующая комбинация формул полной вероятности и Байеса:

$$P(X|A) = \frac{P(A|X)P(X)}{P(A|B_1)P(B_1) + \ldots + P(A|B_n)P(B_n)}.$$

Задача 7.8. Разборчивая невеста. (Загадка.) Девушка выбирает себе жениха из n претендентов, поочерёдно делающих ей предложение. Каждое предложение она может принять (тогда всё заканчивается) или отвергнуть (отвергнутый претендент с повторным предложением не обращается). Она хочет действовать так, чтобы вероятность выбрать наиболее достойного жениха была наибольшей.

а) Докажите, что оптимальная стратегия имеет следующий вид: отвергнуть первые $s(n)$ предложений, а затем принять первое предложение от претендента, превосходящего всех предыдущих.

б) Определите оптимальное значение $s(n)$.