

Задачи к 26.04.

- (1) Докажите, что если кубическая кривая на плоскости трехкратно касается прямой $x_0 = 0$ в точке $(0 : 0 : 1)$, то на аффинной плоскости $x_0 \neq 0$ можно выбрать координаты так, что кривая будет задаваться уравнением $y^2 = P_3(x)$, где $P_3(x)$ — некоторый кубический многочлен от одной переменной.
- (2) Покажите, что кривая, заданная уравнением из предыдущей задачи, неособа тогда и только тогда, когда многочлен $P_3(x)$ не имеет кратных корней.
- (3) (Напоминание) Пусть X — гиперповерхность степени d в $\mathbb{P}^n$, заданная уравнением $F(x_0 : \dots : x_n) = 0$, где F — однородная форма степени d . Ее k -ой полярой относительно точки $a \in \mathbb{P}^n$ называется гиперповерхность $P_a^k X$ степени $d - k$, заданная уравнением $(D_a^k F)(x_0 : \dots : x_n) = 0$, где $D_a = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. (Обратите внимание, что может случиться, что форма $(D_a^k F)$ окажется нулевой, и тогда $P_a^k X$ будет совпадать с $\mathbb{P}^n$.) Покажите, что $b \in P_a^k X \Leftrightarrow a \in P_b^{d-k} X$.
- (4) (Напоминание) Покажите, что касательные прямые к гиперповерхности X в $\mathbb{P}^n$, проходящие через точку $a \in \mathbb{P}^n$, касаются X в точках пересечения X с первой полярой $P_a X$.
- (5) (Напоминание) Покажите, что касательное проективное пространство $\mathbb{T}_a X$ (геометрическое место таких точек b , что прямая ab касается X в точке a) является одновременно касательным пространством ко всем полярам $P_a^k X$ и совпадает с $P_a^{d-k} X$.
- (6) Сколько касательных к плоской кубической кривой X можно провести из данной точки $a \notin X$? Придумайте неособую вещественную кубическую кривую, для которой все эти касательные видны на чертеже.
- (7) То же задание для случая $a \in X$.
- (8) Пусть X плоская кубическая кривая, $a \in X$. Поляра $P_a X$ является коникой, поэтому любая прямая l , отличная от касательной, пересекает $P_a X$ еще в одной точке d . Докажите, что если b и c — точки пересечения X с l , отличные от a , то точки a и d гармонически делят b и c .
- (9) Пусть плоская кубическая кривая, $a \in X$. Пользуясь результатом предыдущей задачи выясните, что можно сказать о кривой X и точке $a \in X$, если известно, что полярная коника $P_a X$ особа. Особенно интересен случай когда точка a является неособой точкой кубики X .

- (10) Потренируйтесь в выяснении взаимного расположения кривой и поляры на кубике Ферма, заданной в аффинных координатах уравнением $x^3 + y^3 = 1$ и заодно найдите все ее точки перегиба.