Лекция 12-19. Многоменый анализ Фурье (продолежние)

Многомерный анализ Фурье во многом параллелен одномерному. Это позволит нам пропусать некоторые детали.

1 Гладкость и убывание коэффициентов Фурье

Теорема 1 *Пусть* $f \in C^l(\mathbb{T}^n), f = \sum a_k e^{ikx}$. *Тогда* $|a_k| < C|k|^{-l}$.

Лемма 1 *Пусть* $m \in \mathbb{Z}^n$, $|m| \le l$, $c_{k,m}$ *–* k*-й коэффициент Фурье от* $D^m f, f = \sum a_k e^{ikx}$. *Тогда*

$$c_{k,m} = (ik)^m a_k.$$

Доказательство Индукция по векторам m, упорядоченным лексикографически. База индукции:

$$c_{k,e_j} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^m} D^j f e^{-ikx} dx = -\frac{1}{(2\pi)^n} \int f(D^j e^{-ikx} dx) = \frac{ik_j}{(2\pi)^n} \int f e^{-ikx} dx.$$

Шаг индукции - оценка коэффициента $c_{k,m+e_j}$ через коэффициент $c_{k,m}$ проводится с помощью той же выкладки. $\square$

Доказательство Теоремы 3. Докажем теорему для случая, когда l четно.

$$f = \sum a_k e^{ikx}$$

$$\Delta f = -\sum a_k |k|^2 e^{ikx}$$

$$\Delta^{\frac{m}{2}} f = -\sum a_k |k|^m e^{ikx}$$

$$\Delta^{\frac{m}{2}} f \in C(\mathbb{T}^n) \Rightarrow |a_k||k|^m < C,\ |a_k| < C|k|^{-m}.$$

$\square$

2 Суммирование по решетке и абсолютная сходимость рядов Фурье

При каком $l = l(n)$ сходится ряд $\sum_{\mathbb{Z}^n \setminus 0} |k|^{-l}$?

Сходимость ряда равносильна сходимости интеграла

$$\int_{r\geq 1} r^{-i} dx = C \int_{r\geq 1} r^{-l+n-1} dr.$$

Интеграл сходится при $n-(l+1)<-1$, т.е. при $l>n$.

Теорема 2 $f \in C^{n+1}(\mathbb{T}^n) \Rightarrow$ *ряд Фурье сходится к* f *абсолютно и равномерно.*

Доказательство По теореме 1, коэффициенты Фурье функции f допускают оценку сверху:

$$|a_k| < C|k|^{-(n+1)}.$$

Ряд $\sum_{\mathbb{Z}^n} C|k|^{-(n+1)}$ сходится. Следовательно, ряд $\Sigma a_k e^{ikx}$ сходится абсолютно и равномерно. Обозначим предельную функцию через $S(x)$. По теореме Рисса, ряд Σ сходится к функции f в $L_2(\mathbb{R}^n)$. В силу единственности предела, $f \equiv S$, и ряд Фурье функции f сходится к ней абсолютно и равномерно. □

3 Многомерное преобразование Фурье

Определение 1 *Пусть функция* $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$. *Тогда определено ее преобразование Фурье*

$$\mathcal{F}f(\alpha) = \tilde{f}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{i\alpha x}dx. \tag{1}$$

Заметьте, что в мультииндексных обозначениях эта формула отличается от одномерной только областью интегрирования. Ниже, если область интегрирования не указана, то это всегда $\mathbb{R}^n$. Наша следующая задача - доказать равенство Парсеваля и формула обращения для преобразования Фурье от функций многих переменных. Это делается так же, как для функций одного переменного. Равенство Парсеваля:

$$\|f\|^2 = \frac{1}{(2\pi)^n}\|\tilde{f}\|^2. \tag{2}$$

Формула обращения:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int \tilde{f}e^{i\alpha x}d\alpha. \tag{3}$$

4 Гладкость и убывание преобразования Фурье

Теорема 3 *Если* $f \in C^{n+1,0}(\mathbb{R}^n)$, *то*

$$\tilde{f}(\alpha) = \int f(x) e^{i\alpha x} dx$$

существует при всех α *и*

$$|\tilde{f}(\alpha)| \leq \frac{C}{1 + |\alpha|^{n+1}}.$$

Доказательство Доказательство аналогично доказательству теоремы 1 и использует лемму:

Лемма 2

$$\mathcal{F}(D^m f) = (i\alpha)^m \mathcal{F}(f)$$

Эта лемма доказывается с помощью интегрирования по частям. □

5 Ряды Фурье для растянутого тора

Растянутый тор $\mathbb{T}_l^n$ - это фактор $\mathbb{R}^n / 2\pi\mathbb{Z}^n$. Функции на растянутом торе отождествляются с функциями на $\mathbb{R}^n$, 2π-периодическими по каждой переменной. Расиянутый тор можно рассматривать как куб $K_l^n = [-\pi l, \pi l]^n$ с отождествленными противоположными точками на параллельных гранях.

Рассмотрим функцию $f \in L_2(K_l^n)$ продолженную периодически (с периодом $2\pi l$ по каждой переменной) на все $\mathbb{R}^n$. Функция $g(x) = f(xl)$ принадлежит $L_2(\mathbb{T}^n)$ и разлагается в классический ряд Фурье

$$g(x) = \Sigma_{k \in \mathbb{Z}^n} g_k e^{ikx}. \tag{4}$$

Сходимость рядов в этой и следующей формулах - в пространствах $L_2(\mathbb{T}^n)$ и $L_2(\mathbb{T}_l^n)$ соответственно.

По определению функции g, при $|x| \leq \pi l$,

$$f(x) = g\left(\frac{x}{l}\right) = \Sigma_{\mathbb{Z}^n} g_k e^{ik\frac{x}{l}} = \Sigma_{\alpha \in \frac{\mathbb{Z}^n}{l}} c_\alpha e^{i\alpha x}. \tag{5}$$

Формула (5) показывает, что векторы $e^{i\alpha x}$, $\alpha \in \frac{\mathbb{Z}^n}{l}$, образуют базис в $L_2([-\pi l, \pi l]^n)$. Их нормы равны $(\sqrt{2\pi l})^n$. Следовательно, при $\alpha \in \frac{\mathbb{Z}^n}{l}$,

$$c_\alpha = \frac{1}{(2\pi l)^n} \int_{[-\pi l, \pi l]^n} f(x) e^{-i\alpha x} dx \tag{6}$$

Равенство Парсеваля для f имеет вид

$$||f||^2 = (2\pi l)^n \ \Sigma_{\alpha\in\frac{\mathbb{Z}^n}{l}}|c_\alpha|^2. \tag{7}$$

В силу (7) и (6),

$$||f||^2 = \frac{1}{(2\pi l)^n}\Sigma_{\alpha\in\frac{\mathbb{Z}^n}{l}}|\tilde{f}(\alpha)|^2 := \Sigma_l. \tag{8}$$

Выражение Σ_l – это "бесконечная интегральная сумма" для интеграла

$$\frac{1}{(2\pi l)^n}||\tilde{f}||^2 = \frac{1}{(2\pi l)^n}\int|\tilde{f}(\alpha)|^2 d\alpha := I$$

Сумма соответствует разбиению $\mathbb{R}^n$ на кубы с ребром длины $\frac{1}{l}$ и с вершинами в точках множества $\frac{\mathbb{Z}^n}{l}$. С одной стороны, эта сумма стремится к интегралу (это еще надо доказать!), с другой последовательность Σ_l стационарна (не зависит от l). Это "доказывает" (8).

Аналогично доказывается формула обращения. Напомним, что для финитной $n+1$ раз гладкой функции f сходимость в формуле (5) - равномерная. Поэтому для любого $l \geq l_0$ и x такого, что $|x| \leq \pi l$,

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi l)^n}\Sigma_{\alpha\in\frac{\mathbb{Z}^n}{l}}\tilde{f}(\alpha)e^{i\alpha x} := S_l(x).$$

Выражение $S_l(x)$ – "бесконечная интегральная сумма" для интеграла

$$I(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\tilde{f}(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha.$$

Переходя к пределу, как и выше (этот переход тоже нужно обосновать), получаем формулу обращения

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\tilde{f}(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha \tag{9}$$

6 Формальное доказательство

Лемма 3 *Если $f \in C^{n+1,0}$, то $\Sigma_l \xrightarrow[l\to\infty]{} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}|\tilde{f}(\alpha)|^2 d\alpha$.*

Лемма 4 *Если $f \in C^{n+1,0}$, то $\forall x \in \mathbb{R}, S_l(x) \to I(x) = \frac{1}{2\pi}\int\tilde{f}(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha$ при $l \to \infty$.*

Из предыдущих рассуждений и леммы 3 следует равенство Парсеваля, а из леммы 4 – формула обращения для финитных дважды гладких функций.

Доказательство [Леммы 3]. Если бы интеграл I был собственным, стремление интегральной суммы к интегралу было бы следствием теории интеграла Римана. Нам нужно “справиться” с несобственным интегралом. Это делается с помощью мажорирования.

В силу теоремы 1, существует $C > 0 : |\tilde{f}(\alpha)| < C(1+\alpha^2)^{-(n+1)}$. Для любого N:

$$\frac{1}{l}\Sigma_{\alpha\in\frac{\mathbb{Z}^n}{l}\setminus[-N,N]}\left|\tilde{f}(\alpha)\right|^2 < \frac{1}{l}\Sigma_{\alpha\in\frac{\mathbb{Z}^n}{l}\setminus[-N,N]^n} < \frac{C}{(1+|\alpha|^{n+1})} < C\int_{\max_j|\alpha_j|\geq N-\frac{1}{l}}\frac{d\alpha}{(1+|\alpha|^{n+1})}.$$

Последний интеграл сходится. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что

$$\left|\int_{|\alpha_j|\geq N}|f(\alpha)|^2 d\alpha\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Поскольку функция f финитна, ее преобразование Фурье непрерывно. По теореме об интегрируемости по Риману непрерывной функции, существует l столь большое, что

$$\left|\frac{1}{l}\Sigma_{\alpha\in\frac{\mathbb{Z}^n}{l},\ |\alpha|\leq N}\left|\tilde{f}(\alpha)\right|^2 - \int_{|\alpha_j|\leq N}\left|\tilde{f}(a)\right|^2 dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда $\left|\Sigma_l - ||\tilde{f}||^2\right| < \varepsilon.$ □

Аналогично доказывается лемма 4.

Задача. Проведите подробное доказательство.

(Оно было рассказано на лекции со всеми правильными коэффициентами)

Вывод. Доказаны равенство Парсеваля и формула обращения для финитных $n+1$ раз гладких функций f.

Продолжение преобразования Фурье с множества финитных гладких функций на все пространство $L_2(\mathbb{R}^n)$ делается так же, как в одномерном случае.