Дополнительные главы алгебры. Домашнее задание к 15 мая.

Задачи сдаются в письменном виде 15 мая в 14:00 (перед контрольной). Каждый пункт стоит 1 балл. Номер варианта зависит от первой буквы вашей фамилии: 1-й: А-Д; 2-й: Е–К; 3-й: Л–П; 4-й: Р–Я.

Вариант 1.

Задача 1. **(а)** Докажите, что алгебра над $\mathbb{Q}$, заданная образующими x, y с определяющими соотношениями $x^2 = 2,\ y^2 = -3,\ xy + yx = 0$, полупроста.

(б) Является ли она телом?

Задача 2. **(а)** Пусть V – одно из неодномерных неприводимых комплексных представлений группы D_7 (на ваш выбор). Выпишите его характер.

(б) Разложите $V \otimes V \otimes V$ в прямую сумму неприводимых.

(в) Разложите $Ind_{D_7}^{D_{14}} V$ в прямую сумму неприводимых представлений D_{14}.

Задача 3. Пусть X – множество из 5 элементов, а Y – множество всех его двухэлементных подмножеств. Группа A_5 действует на этих множествах четными перестановками 5 элементов. **(а)** Найдите $\dim End_{A_5}\mathbb{C}[X]$, $\dim End_{A_5}\mathbb{C}[Y]$ и $\dim Hom_{A_5}(\mathbb{C}[X], \mathbb{C}[Y])$.

(б) Разложите $\mathbb{C}[X]$ и $\mathbb{C}[Y]$ в прямую сумму неприводимых.

(в) Найдите размерности всех комплексных неприводимых представлений группы A_5.

Задача 4. Разложите в прямую сумму комплексных неприводимых представлений группы A_5

(а) индуцированное с какого-нибудь (на ваш выбор) нетривиального одномерного представления циклической подгруппы $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \subset A_5$;

(б) тензорное произведение двух различных трехмерных неприводимых представлений группы A_5.

Задача 5. Опишите все неприводимые представления группы D_5 над полем $\mathbb{F}_7$.

Вариант 2.

Задача 1. **(а)** Докажите, что алгебра над $\mathbb{Q}$, заданная образующими x, y с определяющими соотношениями $x^2 = -2,\ y^2 = 3,\ xy + yx = 0$, полупроста.

(б) Является ли она телом?

Задача 2. **(а)** Пусть V – одно из неодномерных неприводимых комплексных представлений группы D_6 (на ваш выбор). Выпишите его характер.

(б) Разложите $V \otimes V \otimes V$ в прямую сумму неприводимых.

(в) Разложите $Ind_{D_6}^{D_{12}} V$ в прямую сумму неприводимых представлений D_{12}.

Задача 3. Пусть X – множество из 5 элементов, а Y – множество всех его трехэлементных подмножеств. Группа A_5 действует на этих множествах четными перестановками 5 элементов. **(а)** Найдите $\dim End_{A_5}\mathbb{C}[X]$, $\dim End_{A_5}\mathbb{C}[Y]$ и $\dim Hom_{A_5}(\mathbb{C}[X], \mathbb{C}[Y])$.

(б) Разложите $\mathbb{C}[X]$ и $\mathbb{C}[Y]$ в прямую сумму неприводимых.

(в) Найдите размерности всех комплексных неприводимых представлений группы A_5.

Задача 4. Разложите в прямую сумму комплексных неприводимых представлений группы A_5

(а) индуцированное с какого-нибудь (на ваш выбор) нетривиального одномерного представления циклической подгруппы $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \subset A_5$;

(б) Внешний квадрат пятимерного неприводимого представления группы A_5.

Задача 5. Опишите все неприводимые представления группы D_5 над полем $\mathbb{F}_{13}$.

Вариант 3.

Задача 1. **(а)** Докажите, что алгебра над $\mathbb{Q}$, заданная образующими x, y с определяющими соотношениями $x^2 = 2,\ y^2 = 3,\ xy + yx = 0$, полупроста.

(б) Является ли она телом?

Задача 2. **(а)** Пусть V – одно из неодномерных неприводимых комплексных представлений группы D_6 (на ваш выбор). Выпишите его характер.

(б) Разложите $V \otimes V \otimes V$ в прямую сумму неприводимых.

(в) Разложите $Ind_{D_6}^{D_{12}} V$ в прямую сумму неприводимых представлений D_{12}.

Задача 3. Пусть X – множество из 5 элементов, а Y – множество всех неупорядоченных пар элементов множества X. Группа A_5 действует на этих множествах четными перестановками 5 элементов. **(а)** Найдите $\dim End_{A_5}\mathbb{C}[X]$, $\dim End_{A_5}\mathbb{C}[Y]$ и $\dim Hom_{A_5}(\mathbb{C}[X], \mathbb{C}[Y])$.

(б) Разложите $\mathbb{C}[X]$ и $\mathbb{C}[Y]$ в прямую сумму неприводимых.

(в) Найдите размерности всех комплексных неприводимых представлений группы A_5.

Задача 4. Разложите в прямую сумму комплексных неприводимых представлений группы A_5

(а) индуцированное с какого-нибудь (на ваш выбор) нетривиального одномерного представления подгруппы Клейна $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \subset A_5$;

(б) тензорное произведение четырехмерного и какого-нибудь трехмерного неприводимых представлений группы A_5.

Задача 5. Опишите все неприводимые представления группы D_5 над полем $\mathbb{F}_3$.

Вариант 4.

Задача 1. **(а)** Докажите, что алгебра над $\mathbb{Q}$, заданная образующими x, y с определяющими соотношениями $x^2 = 2,\ y^2 = -6,\ xy + yx = 0$, полупроста.

(б) Является ли она телом?

Задача 2. **(а)** Пусть V – одно из неодномерных неприводимых комплексных представлений группы D_5 (на ваш выбор). Выпишите его характер.

(б) Разложите $V \otimes V \otimes V$ в прямую сумму неприводимых.

(в) Разложите $Ind_{D_7}^{D_{14}} V$ в прямую сумму неприводимых представлений D_{14}.

Задача 3. Пусть X – множество из 5 элементов, а Y – множество всех его трехэлементных подмножеств. Группа A_5 действует на этих множествах четными перестановками 5 элементов. **(а)** Найдите $\dim End_{A_5}\mathbb{C}[X]$, $\dim End_{A_5}\mathbb{C}[Y]$ и $\dim Hom_{A_5}(\mathbb{C}[X], \mathbb{C}[Y])$.

(б) Разложите $\mathbb{C}[X]$ и $\mathbb{C}[Y]$ в прямую сумму неприводимых.

(в) Найдите размерности всех комплексных неприводимых представлений группы A_5.

Задача 4. Разложите в прямую сумму неприводимых представлений группы A_5

(а) индуцированное с какого-нибудь (на ваш выбор) нетривиального одномерного представления циклической подгруппы $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \subset A_5$;

(б) тензорный квадрат четырехмерного неприводимого представления группы A_5.

Задача 5. Опишите все неприводимые представления группы D_5 над полем $\mathbb{F}_{11}$.