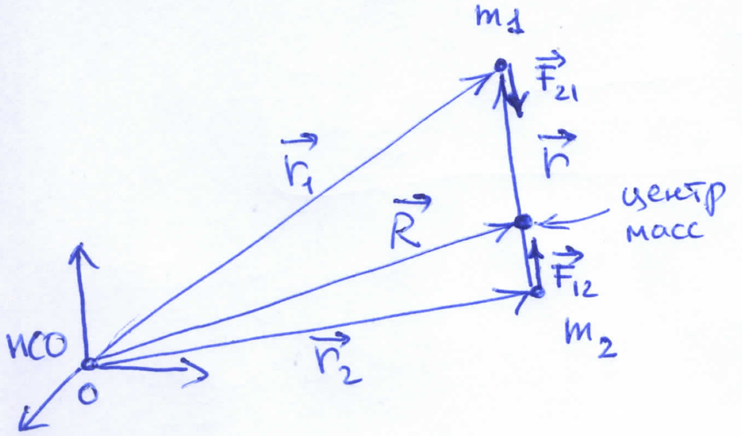
Задача Кеплера

Рассмотрим систему из двух частиц массами m_1 и m_2 в $\mathbb{R}^3$, взаимодействующих между собой посредством центральной силы



Уравнения Ньютона для этой системы имеют вид (см. Рис.):

$$\begin{cases} m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{21}(\vec{r}_1-\vec{r}_2) & (1a) \\ m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{12}(\vec{r}_1-\vec{r}_2) & (1в) \end{cases}$$

Здесь $\vec{r}_{1,2}(t)$ – радиус-вектора частиц 1, 2 в ИСО; $\vec{F}_{ij}$ – сила, действующая на частицу "j" со стороны частицы "i". Эта сила зависит от $\vec{r} := \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ и центральна, то есть

$$\boxed{\vec{F} := \vec{F}_{21}(\vec{r}) = -\frac{\partial U(|\vec{r}|)}{\partial \vec{r}}} \quad (2)$$

(см. конец лекции 2)

Замечаем при этом, что

$$\vec{F}_{21} = -\frac{\partial U(|\vec{r}|)}{\partial \vec{r}} = -\frac{\partial U(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|)}{\partial \vec{r}_1}$$

$$\vec{F}_{12} = -\frac{\partial U(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|)}{\partial \vec{r}_2} = \frac{\partial U(|\vec{r}|)}{\partial \vec{r}} = -\vec{F}_{21}$$

Таким образом для взаимодействующих посредством центральной силы частиц автоматически выполнен 3-й закон Ньютона: $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$.

Заметим также, что взаимодействие 2-х частиц описывается одной функцией потенциальной энергии $U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$, которая "порождает" сразу две силы: $\vec{F}_{21}$ и $\vec{F}_{12}$. Это — общая для фундаментальных взаимодействий ситуация: если у вас есть $n \geq 2$ частиц, то взаимодействуют между собой они исключительно "попарно". Взаимодействие каждой пары частиц, скажем, частицы "i" и частицы "j", описывается одной функцией потенциальной энергии:

$$\boxed{U_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j; \alpha_i, \alpha_j),}$$

где $\vec{r}_i$, $\vec{r}_j$ — радиус-вектора "i"-ой и "j"-ой частиц, α_i, α_j — возможно другие характеристики частиц "i" и "j" (скажем, их спины; у материальных точек, которыми мы пока занимаемся, таких характеристик нет). U_{ij} не может зависеть от характеристик других частиц, отличных от "i" и "j". Таким образом, взаимодействие n частиц разбивается на $\binom{n}{2}$ парных взаимодействий, причем полная потенциальная энергия такого взаимодействия — сумма потенциальных энергий всех парных взаимодействий:

$$\boxed{U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n, \ldots) = \sum_{1 \le i < j \le n} U_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j, \ldots)}$$

Потенциальная энергия — аддитивная величина

Вернемся к задаче 2-х тел: складывая уравнения из (1) мы можем избавиться от сил в правой части:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = 0$$

Введя:

$$\begin{cases} \vec{R} := \dfrac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} & \text{— радиус-вектор центра масс системы} \quad (3a) \\ M := m_1 + m_2 & \text{— масса всей системы} \end{cases}$$

Мы получаем первый закон сохранения в нашей системе частиц: закон сохранения полного импульса системы (ЗСИ):

$$\boxed{M \dot{\vec{R}} = \vec{P} = \overrightarrow{const}} \qquad (3б)$$

Оставшиеся 3 степени свободы в системе 2-х частиц удобно описывать координатой $\vec{r}$

Линейно комбинируя уравнения (1): $\frac{1}{m_1+m_2}\left(m_2 * (1a) - m_1 * (1б)\right)$

получаем
$$\boxed{\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r})}, \qquad (4)$$

где $\boxed{\mu := \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}$ называется приведенной массой системы 2-х частиц

Уравнение (4) выглядит как уравнение Ньютона для частицы массы μ с радиус-вектором $\vec{r}$, находящейся под действием центральной силы $\vec{F}(\vec{r})$ (центр теперь расположен в начале координат). Это уравнение и будем дальше решать, но прежде обсудим еще кинетическую энергию системы частиц:

Как и потенциальная, кинетическая энергия — аддитивная величина, поэтому для системы 2-х частиц

$$\boxed{T_{кин.} = \frac{m_1 \dot{\vec{r}}_1^{\,2}}{2} + \frac{m_2 \dot{\vec{r}}_2^{\,2}}{2} = \frac{M \dot{\vec{R}}^2}{2} + \frac{\mu \dot{\vec{r}}^{\,2}}{2}} \qquad (5)$$

Последнее равенство легко проверить, оно интерпретируется так: кинетическая энергия 2-х частиц складывается из кинетической энергии их центра масс и кинетической энергии относительного движения частиц. Нормировка радиус-вектора центра масс $\vec{R}$ в (3а) /множитель $\frac{1}{m_1+m_2}$/ как раз выбрана так, чтобы обеспечить привычный вид кинетической энергии центра масс в (5)

Ещё одно замечание, прежде чем перейдем к анализу (4): исходные координаты $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ выражаются через новые $\vec{R}$ и $\vec{r}$ так:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \vec{r}_{01}, \quad \vec{r}_2 = \vec{R} + \vec{r}_{02}, \tag{6a}$$

где

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{r}_{01} &= -\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r} \\ \vec{r}_{02} &= \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r} \end{aligned}} \leftarrow \text{координаты частиц 1 и 2 в системе центра масс.} \tag{6в}$$

Поэтому, определив $\vec{r}$, мы тут же узнаем как ведут себя частицы в системе центра масс.

Займёмся (4): домножим обе его части векторно на $\vec{r}$. С учетом того, что $\vec{F} \parallel \vec{r}$ получаем

$$\mu[\vec{r}, \ddot{\vec{r}}] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\mu[\vec{r}, \dot{\vec{r}}]\right) = 0$$

Величина $\boxed{\vec{L} := \mu[\vec{r}, \dot{\vec{r}}]}$ называется (7) моментом импульса частицы $\mu, \vec{r}$ относительно начала отсчета (в нашем случае относительно центра масс системы). Мы получили ещё один закон сохранения — закон сохранения момента импульса системы (ЗСМИ):

$$\boxed{\mu[\vec r,\dot{\vec r}] = \vec L = \overrightarrow{const}} \qquad (8)$$

В случае, когда $\vec L \neq 0$, заключаем, что движение частицы μ, $\vec r(t)$ происходит в плоскости, ортогональной $\vec L$ ($\vec r \perp \vec L$ и $\dot{\vec r} \perp \vec L$)

Упр: Убедитесь, что в случае $\vec L = 0$ движение происходит по прямой, которая также $\perp \vec L$.

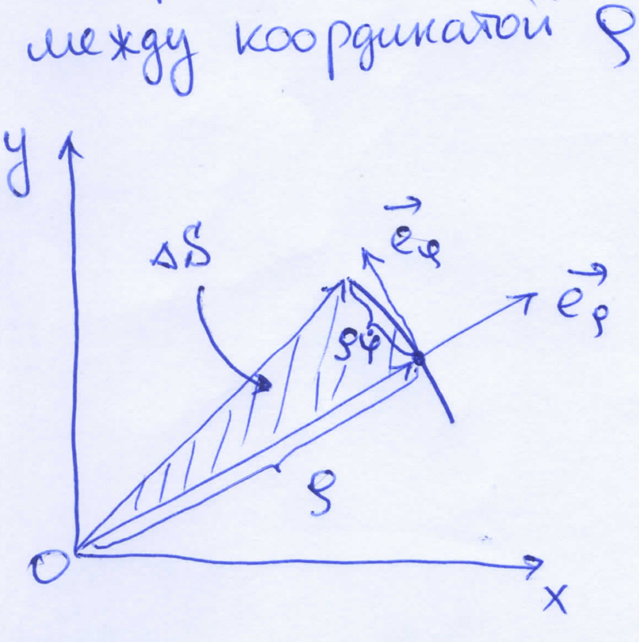
Сориентируем теперь орты нашей ИСО таким образом, чтобы $\vec L \uparrow\uparrow \vec e_z$. Движение происходит в плоскости $(\vec e_x, \vec e_y)$, в которой мы перейдём к полярным координатам $(\vec e_\rho, \vec e_\varphi)$ /см. стр 8 лекции 1/

$$\vec r = \rho\vec e_\rho, \quad \dot{\vec r} = \dot\rho\vec e_\rho + \rho\dot\varphi\vec e_\varphi$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{L := |\vec L| = \mu\rho^2\dot\varphi = const} \qquad (8a)$$

Сохранение величины вектора $\vec L$ даёт связь между координатой ρ и угловой скоростью $\dot\varphi$.



Замечая, что $\Delta S = \frac{\rho\dot\varphi^2}{2}$ — это площадь сектора, заметаемого радиус-вектором $\vec r(t)$ в единицу времени, мы можем переформулировать (8а) как

Второй закон Кеплера (1609г): секториальная скорость частицы в центральном поле постоянна:

$$\boxed{\frac{dS}{dt} := \frac{\rho\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{L}{2\mu}} \qquad (8б)$$

Нам осталось написать для нашей системы последний закон сохранения — закон сохранения энергии (он всегда есть в системе с потенциальными силами).

Домножаем (4) скалярно на $\dot{\vec{r}}$, вспоминаем (2) и получаем

$$\frac{d}{dt}\left(\mu\frac{\dot{\vec{r}}^{\,2}}{2}\right) = -\left(\vec{\nabla}U\cdot\dot{\vec{r}}\right) = -\frac{dU}{dt}$$

$$\Downarrow$$

ЗСЭ: $$\boxed{\mu\frac{\dot{\vec{r}}^{\,2}}{2} + U(|\vec{r}|) = E = const} \qquad (9)$$

Заметим, что это закон сохранения энергии относительного движения частиц (записан в системе центра масс). В нём не содержится кинетическая энергия центра масс $\frac{M\dot{\vec{R}}^2}{2}$ (потенциальной энергии у центра масс нет), но эта энергия сохраняется отдельно в силу ЗСИ.

Воспользуемся ЗСМИ (8а) для того, чтобы записать ЗСЭ (9) в терминах исключительно ρ и $\dot\rho$:

С учетом $|\vec r| = \rho$, $\dot{\vec r}^{\,2} = \dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2$, из (9) получаем

ЗСЭ : $$\boxed{\frac{\mu\dot\rho^2}{2} + \frac{L^2}{2\mu\rho^2} + U(\rho) = E} \qquad (9а)$$

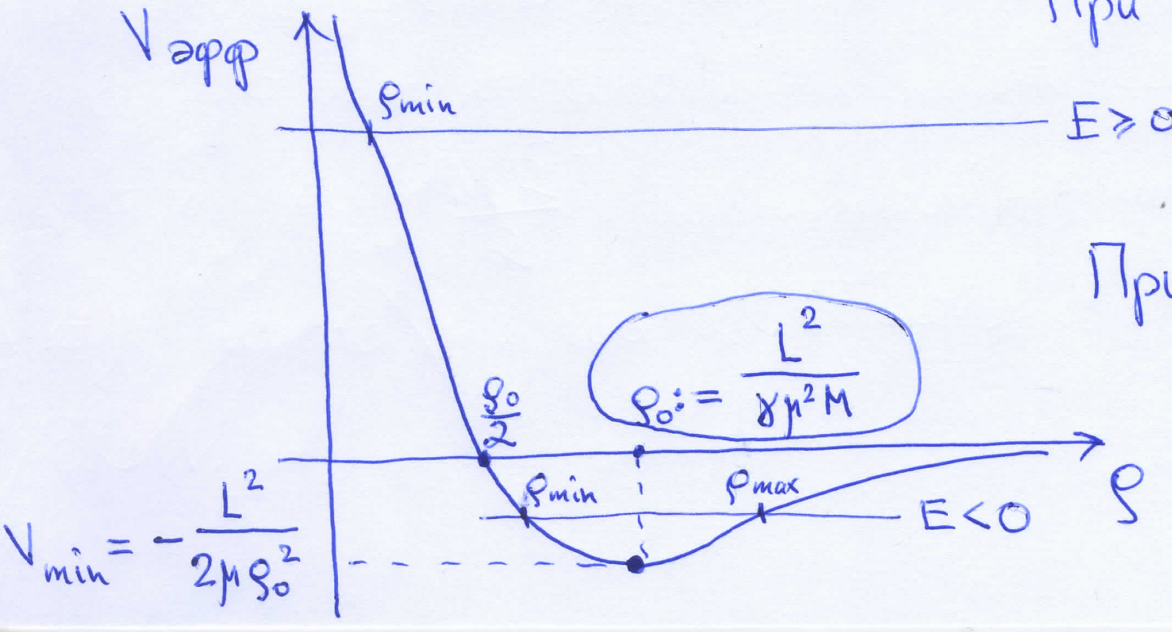
Это уже выглядит как закон сохранения энергии 1-мерной частицы μ, $\rho(t)$ в поле с эффективным потенциалом

$$\boxed{V_{эфф}(\rho) = \frac{L^2}{2\mu\rho^2} + U(\rho)} \qquad (10)$$

Зарисуем фазовый портрет такой системы при разных потенциалах $U(\rho)$

ⓐ Гравитационное взаимодействие

$$\boxed{U_{грав}(\rho) = -\frac{\gamma m_1 m_2}{\rho} = -\frac{\gamma\mu M}{\rho}} \qquad (11)$$



При $E \geq 0$ движение системы неограниченно: $\rho \in [\rho_{min}, +\infty)$

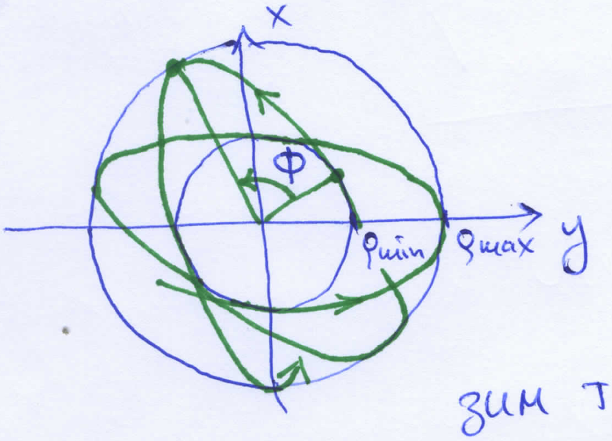
При $E < 0$ движение ограничено $\rho \in [\rho_{min}, \rho_{max}]$

Точка $\rho = \rho_0$ при $E = V_{min}$ является точкой покоя. Это не значит наша система находится в состоянии покоя. Покоится только $\rho = \rho_0$, а координата φ меняется по линейному закону

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{\mu \rho_0^2} = \frac{\gamma^2 \mu^3 M^2}{L^3} \quad (\text{см. } (8a))$$

то есть мы имеем равномерное движение по кругу.

В остальных случаях ограниченного движения $V_{min} < E < 0$ система вращается внутри кругового кольца (см. рис.)



Естественный вопрос: когда получившаяся траектория будет замкнутой?

Для выяснения ответа выразим траекторию $\rho(t)$, $\varphi(t)$ как $\varphi(\rho)$: из (9a) и (8a) имеем

$$\dot{\rho} = \sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - V_{эфф}(\rho)\right)}$$ на участке, когда ρ возрастает от ρ_{min} до ρ_{max}

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{\mu \rho^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\rho}} = \frac{L}{\rho^2 \sqrt{2\mu\left(E - V_{эфф}(\rho)\right)}}$$

$$\Downarrow$$

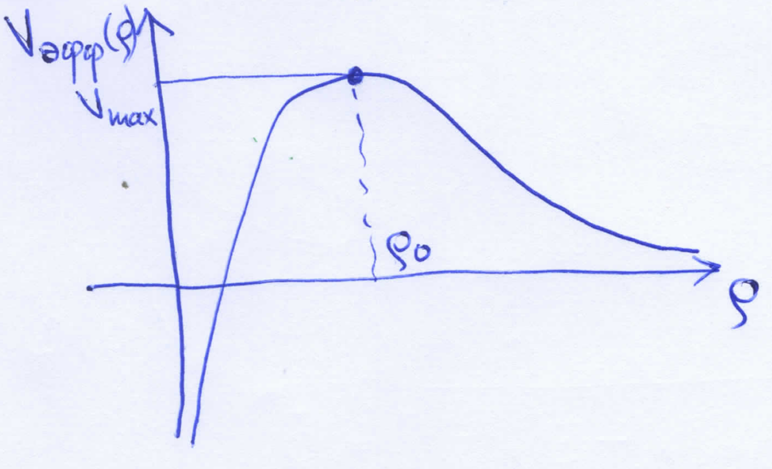
$$\boxed{\Phi = \int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} \frac{L\, d\rho}{\rho^2 \sqrt{2\mu\left(E - V_{эфф}(\rho)\right)}}}$$

Здесь Φ – это угол, на который поворачивается радиус-вектор $\vec{r}(t)$ частицы при изменении $\rho = |\vec{r}|$ с ρ_{min} до ρ_{max} (см. рис.). Чтобы траектория частицы была замкнута, требуется

$$\boxed{\Phi = 2\pi q, \text{ где } q \in \mathbb{Q}}$$

Как доказывается в учебнике В. Арнольда (см. §8 Г.), все ограниченные орбиты замкнуты лишь для потенциалов $U(\rho) = -a/\rho$ и $U(\rho) = a\rho^2$, $a > 0$.

(б) Взаимодействие с потенциалом $U(\rho) = -\frac{1}{\rho^3}$



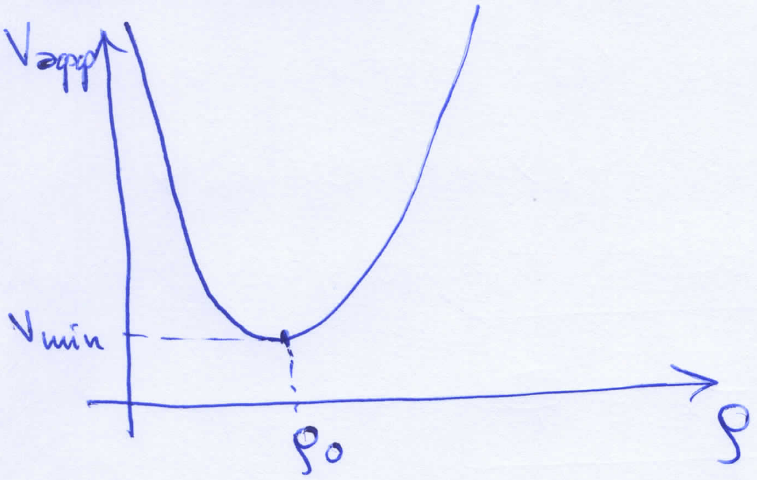
В таком потенциале все ограниченные орбиты движения $E \leq V_{max}$ являются падениями на центр $\rho \in [0, \rho_{max}]$

Имеется одна неустойчивая круговая орбита $\rho = \rho_0$, $E = V_{max}$. Неограниченные орбиты при $E > V_{max}$ тоже содержат падение: $\rho \in (0, +\infty)$

Единственные орбиты без падений: неограниченные при $0 < E \leq V_{max}$.

Это – Катастрофический мир.

в) Взаимодействие с потенциалом $U(\rho)=\rho^2$ (11)



В таком мире есть одна устойчивая круговая орбита $\rho=\rho_0$, $E=V_{min}$.

Все остальные орбиты при $E>V_{min}$ ограничены.

Улететь насовсем от такого центра притяжения нельзя.

Так что нам повезло с гравитацией — это один из лучших возможных потенциалов.

Давайте, наконец, определим явный вид траекторий частиц для гравитационного потенциала.

Будем интегрировать закон сохранения энергии (9а) для потенциала (11):

$$\boxed{\frac{\mu\dot{\rho}^2}{2}+\frac{L^2}{2\mu\rho^2}-\gamma\frac{\mu M}{\rho}=E} \qquad (12a)$$

Вместо поиска $\rho(t)$ и $\varphi(t)$ (см. (8а)) займемся поиском $\rho(\varphi)$, а ещё удобней

$$u(\varphi):=\frac{1}{\rho(\varphi)}$$

Вычислим производную

$$\frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\varphi} = -\frac{1}{\rho^2}\frac{\dot\rho}{\dot\varphi} \overset{(8a)}{=\!=} -\frac{\dot\rho}{\cancel{\rho^2}}\cdot\frac{\mu\cancel{\rho^2}}{L} = -\frac{\mu}{L}\dot\rho$$

Поэтому (12а) переписывается в новых переменных

$$\boxed{\frac{L^2}{2\mu}\left[\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2\right] - \gamma\mu M\cdot u = E} \qquad (12в)$$

Здесь удобно вернуться назад от "закона сохранения" к "уравнению Ньютона", продифференцировав (12в) по φ. Получим:

$$\boxed{\frac{du}{d\varphi}\left\{\frac{L^2}{\mu}\left[\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u\right] - \gamma\mu M\right\} = 0}$$

Если $\frac{du}{d\varphi} \neq 0$ (т.е. орбита не круговая), то, сократив на $\frac{du}{d\varphi}$, мы получаем линейный неоднородный дифур 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

Решение однородного дифура:

$$u(\varphi) = A\cos\varphi + B\sin\varphi \overset{\text{иная параметризация}}{=} C\cos(\varphi - \varphi_0).$$

Частное решение неоднородного дифура:

$$u_0(\varphi) = \frac{\gamma\mu^2 M}{L^2} = \text{const}$$ — это, кстати, и есть решение для круговой орбиты (см. рис. на стр 8)

Общее решение представим так:

$$\boxed{u(\varphi) = \frac{1}{\rho(\varphi)} = \frac{\gamma\mu^2 M}{L^2}\left(1 - \varepsilon\cos(\varphi - \varphi_0)\right)} \quad (13)$$

Здесь ε и φ_0 – параметры решения, определяемые из начальных данных.

(13) – это общая формула конического сечения.

Подставив (13) в (12в) можно связать энергию относительного движения частиц E с параметром ε:

$$\boxed{E = \frac{\gamma^2\mu^3 M^2}{2L^2}(\varepsilon^2 - 1) = |V_{min}|(\varepsilon^2 - 1)} \quad (14)$$

(см. рис. на стр. 8)

При $\varepsilon > 1$ уравнение (13) задает гиперболу, что соответствует движению с $E > 0$

При $\varepsilon = 1$ — параболу – соответствует $E = 0$

При $\varepsilon < 1$ – эллипс – соответствует $E < 0$

Всё это полностью согласуется с фазовым портретом системы на стр. 8.

В случае замкнутой орбиты: $0 \le \varepsilon < 1$, вводя новое обозначение "a":

$$\boxed{\frac{1}{a(1-\varepsilon^2)} = \frac{\gamma\mu^2 M}{L^2} = \frac{1}{\rho_0}} \quad (15)$$

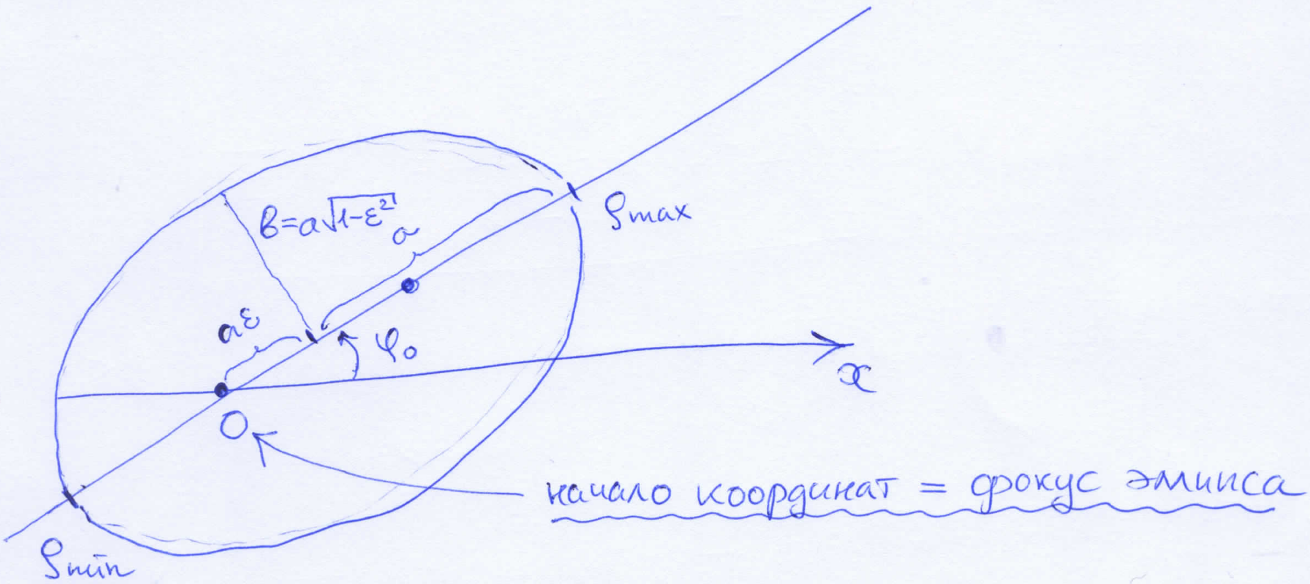
получаем следующие выражения для точек поворота (min и max значения ρ):

$$\rho_{min} = a(1-\varepsilon) \quad (\text{случается при } \varphi = \varphi_0 + \pi \text{ в } (13))$$

$$\rho_{max} = a(1+\varepsilon) \quad (\text{случается при } \varphi = \varphi_0 \text{ в } (13))$$

Поэтому "a" имеет смысл длины большой полуоси эллипса, "ε" – его эксцентриситет.

Картинка орбиты:



Пользуясь (14), (15) можно выразить энергию E через геометрическую характеристику эллипса a:

$$\boxed{E = -\frac{\gamma \mu M}{a}}$$

Первый закон Кеплера (1609).

Планеты солнечной системы движутся по эллиптическим орбитам, в одном из фокусов которых находится Солнце

До Кеплера считалось, что планеты движутся по окружностям.

Rem: Точнее, мы знаем, что по эллиптическим орбитам вокруг общего фокуса движется и Солнце и планета. Фокус находится в центре масс системы Солнце-планета.

$$\boxed{\vec{r}_{\text{Солнца}} = \frac{-m_{\text{планета}}}{m_{\text{солн.}}+m_{\text{план.}}}\vec{r}}, \quad \boxed{\vec{r}_{\text{планета}} = \frac{m_{\text{солн.}}}{m_{\text{солн.}}+m_{\text{план.}}}\vec{r}}$$

(см. (6в) на стр 5). Но, сравнивая массы солнца и планет: $\boxed{m_{\text{солн.}} \cong 10^3 m_{\text{юпитер}} \cong 3{,}3\cdot 10^5 m_{\text{земля}}}$

заключаем, что Солнце практически стоит в фокусе.

Кеплер не знал о характеристиках движения планет L и E, он вычислял периоды обращения планет τ

Из 2-го закона Кеплера следует:

$$\frac{dS}{dt} = \text{const} = \frac{L}{2\mu} = \frac{S_0}{\tau}$$

, где S_0 - площадь эллипса, заметаемого планетой за период обращения τ,

$$S_0 = \pi a b = \pi a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}$$

, откуда вычислим:

$$\tau^2 = \pi^2 a^4(1-\varepsilon^2)\frac{4\mu^2}{L^2} = \frac{4\pi^2 a^3}{\gamma M} \quad (\text{см. } (15))$$

Третий закон Кеплера (1619 г)

$$\boxed{\frac{\tau^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma M} = \text{const}}$$

(одна и та же константа для разных планет $M \cong m_{\text{солн.}}$)