Лекции 6-7

15.05.2018г

1

Лагранжев формализм: определения, примеры, свойства.

Def. Лагранжева механическая система задаётся набором:

1) M – многообразие, называемое <u>конфигурационным пространством</u>. $\dim M = N$ – <u>число степеней свободы</u> системы.

2) <u>Лагранжиан</u> $L : TM \to \mathbb{R}$ – функция на ~~ко~~касательном расслоении TM, называемом <u>фазовым пространством</u> системы. Как правило $L \in C^\infty(TM)$. Минимальное требование: L дважды дифференцируема и ее 2-е частные производные удовлетворяют условию Липшица.

<u>Rem 1</u>: В более общей формулировке $L : [t_0, t_1] \times TM \to \mathbb{R}$ является функцией на, так называемом, <u>расширенном фазовом пространстве</u>. В таком случае энергия механической системы не будет сохраняться (см. далее)

<u>Rem 2</u>. Лагранжев формализм в нерелятивистской механике менее широко применим, чем Ньютонов. Он работает только для систем, в которых действуют <u>потенциальные силы</u> (сила трения исключена) и на которые наложены <u>идеальные связи</u>. Однако лагран-

жев формализм, в отличие от ньютонова, естественным образом обобщается на релятивистскую механику, теорию поля и далее на квантовые теории.

Rem 3. Мы формально-математически задали исходные данные для лагранжевой мех. системы. Реальная задача математической физики — выбрать адекватные обобщенные координаты q_α, $\alpha = 1, \dots, N$ — локальные координаты на M, и построить для данной мех. системы её функцию Лагранжа $L(q, \dot{q}, t)$.

Динамика лагранжевой мех. системы задается уравнениями Эйлера-Лагранжа:

$$\boxed{L_\alpha := \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial}{\partial q_\alpha}\right) L(q, \dot{q}, t) = 0} \quad (1)$$

$\alpha = 1, 2, \dots, N.$

Это — дифференциальные уравнения 2-го порядка по t, поскольку при действии на функции q, $\dot{q}$ и t оператор $\frac{d}{dt}$ имеет вид:

$$\boxed{\frac{d}{dt} = \sum_{\beta=1}^{N} \left(\ddot{q}_\beta \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\beta} + \dot{q}_\beta \frac{\partial}{\partial q_\beta}\right) + \frac{\partial}{\partial t}} \quad (2)$$

В дальнейшем при появлении в формулах повторяющихся индексов мы подразумеваем суммирование по ним, а знак $\sum_{\beta=1}^{N}$ опускаем.

Подставим (2) в (1):

$$\boxed{L_\alpha = \underbrace{\ddot{q}_\beta \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\beta \partial \dot{q}_\alpha}} + \dot{q}_\beta \frac{\partial^2 L}{\partial q_\beta \partial \dot{q}_\alpha} + \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0} \qquad (1')$$

Вот член со 2-м производными $\ddot{q}_\beta$. Матрица при $\ddot{q}_\beta$:

$$\boxed{W_{\beta\alpha}(q,\dot{q},t) := \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\beta \partial \dot{q}_\alpha}} \qquad (3)$$

Называется гессианом мех. системы. Если $\det W \neq 0$, то уравнения Эйлера-Лагранжа можно разрешить относительно старших производных. Такая мех. система называется невырожденной. В таких системах работает теорема о $\exists!$ решения. При этом TM — пространство начальных данных системы.

Rem: Если $\det W = 0$, то механическая система называется сингулярной. В нерелятивистской механике такие системы не изучаются, но в релятивистской механике, теории поля и далее в квантовой теории сингулярные системы являются основным объектом изучения. В физике такие теории называют калибровочными. Для них требуется по-новому определить пространство начальных данных (не TM).

Теорию сингулярных систем в середине 20 века начал строить П. Дирак – выдающийся мат-физик 20 века.

Рецепт построения лагранжианов в нерелятивистской механике (следует из принципа Даламбера):

$$\boxed{L = T - U}$$

T – кинетическая энергия системы. Для системы материальных точек в декартовой ИСО

$$\boxed{T = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}}{2}}$$

В цилиндрических и сферических системах:

$$\frac{m\dot{\vec{r}}^{\,2}}{2} = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)$$

В общем случае:

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{N} W_{\alpha\beta}\,\dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta},$$

где $W_{\alpha\beta}$ – тот самый гессиан, причем в нерел. механике $W = W(q, t)$ не зависит от обобщенных скоростей $\dot{q}$, а поэтому T – квадратичная форма скоростей, причём она – положительно определенная форма.

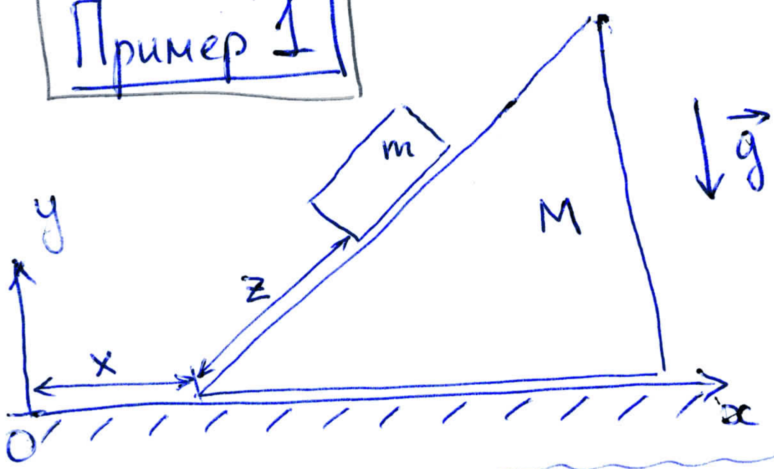
U — <u>потенциальная энергия</u> системы.

$$\boxed{U = U(\vec{r}_i, t) \quad \text{и} \quad \vec{F}_i = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \equiv \vec{\nabla}_i U} \;\text{—}$$

это сила, действующая на i-ю материальную точку системы.

<u>Rem</u>: Очевидно, функция U определена с точностью до аддитивной const.

Пример 1



Клин массы M на горизонтальной плоскости. Кирпич массы m на наклонной поверхности клина. Угол клина — α. Трения нет. Есть однородная сила тяжести.

Система имеет 2 степени свободы. В качестве обобщенных координат можно выбрать x и z (см. рис.), но мы заменим x на координату <u>центра масс</u> системы по оси $O\vec{x}$:

$$\boxed{X = \frac{Mx + m(x + z\cos\alpha)}{M+m}}$$

Кинетическая энергия:

$$T = \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}(\dot{x} + \dot{z}\cos\alpha)^2 =$$

$$= \frac{(M+m)}{2}\dot{X}^2 + \frac{m}{2}\left(\frac{M + m\sin^2\alpha}{M+m}\right)\dot{z}^2$$

Видно, что в терминах координат X, z кинетическая энергия (в отличие от координат x, z) является диагональной квадратичной формой.

Это удобко.

Rem Диагонализация квадратичной формы T в нашем случае является следствием общего факта: при переходе в систему центра масс системы материальных точек кинетическая энергия центра масс системы "отделяется" от остальных вкладов в кин. энергию:

$$\vec{r}_i \longmapsto \boxed{\vec{R} := \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}}, \quad \vec{s}_i := \vec{r}_i - \vec{R}$$

$$\boxed{T = \sum \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}}{2} = \left(\sum_i m_i\right) \frac{\dot{\vec{R}}^2}{2} + \sum_i \frac{m_i \dot{\vec{s}}_i^{\,2}}{2}},$$

причем $\vec{s}_i$ линейно зависимы: $\sum_i m_i \vec{s}_i = 0$

Продолжаем решать наш пример:

$$U = mgz \sin\alpha \text{ — пот. энергия силы тяжести.}$$

$$\boxed{L = T - U = \frac{(M+m)}{2} \dot{x}^2 + \frac{m}{2} \frac{M + m\sin^2\alpha}{M+m} \dot{z}^2 - mgz\sin\alpha}$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа

$$L_x := \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt}\left((M+m)\dot{x}\right) = 0$$

Так как $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$

Это уравнение легко проинтегрировать 1 раз и получить закон сохранения:

$$\boxed{P_x = (M+m)\dot{x} = \text{const}}$$

Это сохранение проекции импульса центра масс системы на ось $O\vec{x}$.

$$L_z := \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot z}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = m\,\frac{M+m\sin^2\alpha}{M+m}\,\ddot z + mg\sin\alpha = 0$$

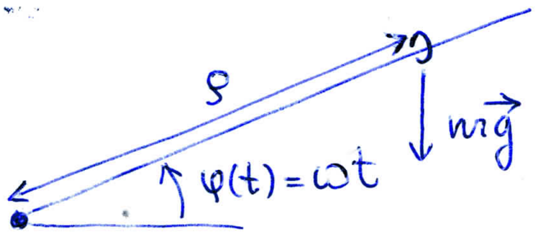
$$\Downarrow$$

$$\boxed{\ddot z = -\frac{(M+m)\,g\sin\alpha}{M+m\sin^2\alpha}}$$

$\ddot x = 0$ — равноускоренное движение.

$$\boxed{\ddot x = \frac{mg\sin\alpha\cos\alpha}{M+m\sin^2\alpha}}$$

Пример 2а Кольцо на стержне в поле тяжести.



Стержень равномерно вращается: $\varphi(t) = \omega t$. Трения нет. На кольцо действует сила тяжести.

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot\rho^2 + \omega^2\rho^2\right)$$

$$U = mg\rho\sin\omega t$$

$$L = \frac{m}{2}\dot\rho^2 + \frac{m\omega^2}{2}\rho^2 - mg\rho\sin\omega t$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа

$$L_\rho = m\ddot\rho - m\omega^2\rho + mg\sin\omega t = 0$$

Частное решение: $\rho(t) = \dfrac{g}{2\omega^2}\sin\omega t$

Общее решение:

$$\rho(t) = \alpha e^{\omega t} + \beta e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t$$

или в терминах начальных данных $\rho(0)=\rho_0$, $\dot\rho(0)=\dot\rho_0$:

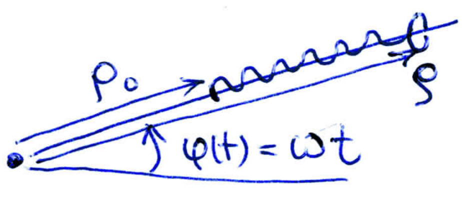
$$\boxed{\rho(t) = \rho_0 \operatorname{ch}\omega t + \left(\frac{\dot\rho_0}{\omega} - \frac{g}{2\omega^2}\right)\operatorname{sh}\omega t + \frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t}$$

Замечаем, что движение бусинки в ограниченной области возможно только если

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\rho_0 + \frac{\dot\rho_0}{\omega} - \frac{g}{2\omega^2}\right) = 0$$

При этом стержень надо продолжить по обе стороны от начала координат и дать возможность бусинке проскальзывать сквозь начало координат. ($\rho(t) \in \mathbb{R}$)

Пример 2 в Кольцо на стержне с пружинкой.



$$T = \frac{m}{2}(\dot\rho^2 + \omega^2\rho^2)$$

$$U = \frac{k}{2}(\rho-\rho_0)^2$$ – потенциальная энергия абсолютно упругой пружины жесткости k, закрепленной в точке ρ_0:

$$\vec{F}_{упр} = -k(\vec\rho - \vec\rho_0).$$

$$L = \frac{m}{2}\dot\rho^2 + \frac{m\omega^2}{2}\rho^2 - \frac{k}{2}(\rho-\rho_0)^2$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$\boxed{m\ddot\rho - m\omega^2\rho + k(\rho-\rho_0) = 0}$$

Частное решение: $\rho(t) = \frac{k\rho_0}{k - m\omega^2}$ $(k \neq m\omega^2)$

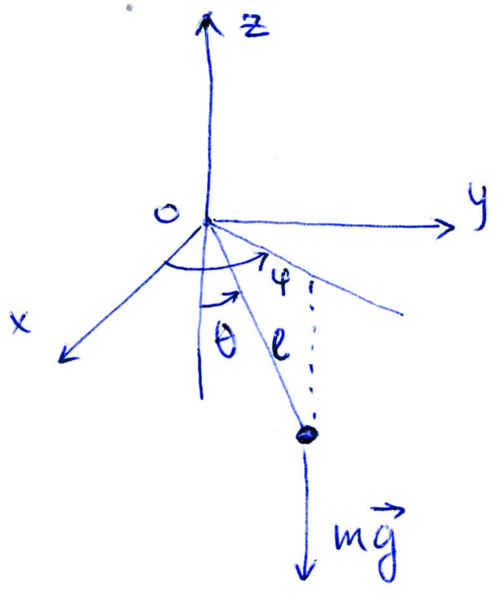
Общее решение ограничено при $k > m\omega^2$:

$$\rho(t) = \frac{k\rho_0}{k - m\omega^2} + A\cos\sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2}\,t + B\sin\sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2}\,t$$

при этом частное решение является устойчивым положением равновесия.

Если $k \leq m\omega^2$, общее решение неограничено. При $k < m\omega^2$ частное решение — неустойчивое положение равновесия. При $k = m\omega^2$ положения равновесия нет.

Пример 3 | Сферический маятник



Материальная точка массы m закреплена на жестком невесомом стержне, другой конец которого шарнирно закреплен в начале координат. Дело происходит в $\mathbb{R}^3$. Действует однородная сила тяжести.

Адекватные задаче координаты — сферические. Система имеет 2 степени свободы: θ и φ.

$$T = \frac{m}{2}\left(l^2\dot\theta^2 + l^2\sin^2\theta\,\dot\varphi^2\right),$$ где

l – длина стержня.

$U = -mgl\cos\theta$, $\quad L = T - U$.

Уравнение движения по переменной φ:

$$L_\varphi = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}\right) - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = \frac{d}{dt}\left(ml^2\sin^2\theta\,\dot\varphi\right) = 0$$

$\Downarrow$ Закон сохранения момента импульса (проекции на ось $O\vec{z}$)

$$\boxed{ml^2\sin^2\theta\,\dot\varphi = J} \quad (*)$$

Уравнение движения по оси θ:

$$L_\theta = ml^2\ddot\theta - ml^2\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta + mgl\sin\theta = 0$$

Имеет частное стационарное решение $\theta = \mathrm{const}$, при этом если $\theta \neq 0$, то имеем условие на $\dot\varphi$:

$$\dot\varphi^2 = \frac{g}{l\cos\theta}$$

Общее решение L_θ искать неудобно. Проще воспользоваться ещё одним законом сохранения: законом сохранения энергии:

$$\mathrm{const} = E = T + U = \frac{ml^2}{2}\dot\theta^2 + \frac{ml^2}{2}\sin^2\theta\,\dot\varphi^2 - mgl\cos\theta$$

Подставив сюда выражение для $\dot\varphi$ из $(*)$ можно построить фазовый портрет системы по переменной θ и убедиться, что стационарное решение устойчиво.

Основные свойства лагранжева формализма:

Ⓐ Одна и та же механическая система задается классом эквивалентности лагранжианов L_f:

$$\boxed{L_f(q,\dot{q},t) = L_0(q,\dot{q},t) + \frac{d}{dt}\big(f(q,t)\big)} \quad (**)$$

где f – произвольная достаточное число раз дифференцируемая функция.

Более того, для всего класса L_f уравнения Эйлера-Лагранжа совпадают тождественно.

Для доказательства надо проверить:

$$\left(\frac{d}{dt}\circ\frac{\partial}{\partial\dot{q}_\alpha} - \frac{\partial}{\partial q_\alpha}\right)\frac{df(q,t)}{dt} \equiv 0, \quad \forall\alpha. \text{ (проверьте)}$$

Свойство $(**)$ обобщает утверждение о том, что потенциальная энергия $U(q,t)$ определена с точностью до констант. И это содержательное обобщение. В частности оно гарантирует физическую неразличимость наблюдений свободной частицы в двух ИСО, одна из которых движется равномерно и прямолинейно относительно другой. Действительно, для одномерной свободной частицы:

$L_0 = \frac{m}{2}\dot{x}^2$. В движущейся системе

$x'(t) = x(t) + v t$, поэтому

$$L' = \frac{m}{2}\dot{x}'^2 = \frac{m}{2}(\dot{x}+v)^2 = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{d}{dt}\left(mvx + \frac{mv^2 t}{2}\right)$$

$$L' = L_0 + \frac{d}{dt}\left(mvx + \frac{mv^2}{2}t\right),$$

откуда следует тождественность уравнений Э.-Л. в двух системах отсчёта.

В) Лагранжев формализм ковариантен при, так называемых, точечных заменах координат: если на (расширенном) конфигурационном пространстве системы есть две системы координат $\{q_\alpha\}$ и $\{y_\alpha\}$, связанных обратимым преобразованием

$$\boxed{y_\alpha = y_\alpha(q,t)},$$

причем в координатах $\{y_\alpha\}$ система задается лагранжианом $L^{(y)}(y,\dot{y},t)$, то в координатах $\{q_\alpha\}$ она задается лагранжианом

$$\boxed{L^{(q)}(q,\dot{q},t) = L^{(y)}(y(q,t), \dot{y}(q,t), t)}$$

Доказательство этого утверждения сводится к проверке того, что уравнения Э.-Л., отвечающие лагранжианам $L^{(q)}$ и $L^{(y)}$ связаны обратимым линейным преобразованием:

$$\boxed{L^{(q)}_{\alpha} = L^{(y)}_{\beta} \frac{\partial y_\beta}{\partial q_\alpha}}$$

Действительно, т.к. $\frac{\partial \dot y_\beta}{\partial \dot q_\alpha} = \frac{\partial y_\beta}{\partial q_\alpha}$, то

$$L^{(q)}_{\alpha} = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot q_\alpha} - \frac{\partial}{\partial q_\alpha}\right) L^{(y)}\big(y(q,t), \dot y(q,t), t\big) =$$

только в $\dot y$ есть $\dot q$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^{(y)}}{\partial \dot y_\beta}\frac{\partial y_\beta}{\partial q_\alpha}\right) - \left(\frac{\partial L^{(y)}}{\partial y_\beta}\frac{\partial y_\beta}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial L^{(y)}}{\partial \dot y_\beta}\frac{\partial \dot y_\beta}{\partial q_\alpha}\right) =$$

$$= \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L^{(y)}}{\partial \dot y_\beta} - \frac{\partial L^{(y)}}{\partial y_\beta}\right)\frac{\partial y_\beta}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial L^{(y)}}{\partial \dot y_\beta}\underbrace{\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial y_\beta}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial \dot y_\beta}{\partial q_\alpha}\right)} =$$

$$= L^{(y)}_{\beta}\frac{\partial y_\beta}{\partial q_\alpha} \quad \blacksquare$$

Зануляется, т.к. $\frac{d}{dt}$ и $\frac{\partial}{\partial q_\alpha}$ коммутируют при действии на $y_\beta(q,t)$.

C1 Если лагранжиан системы не зависит от какой-то обобщенной координаты q_{α_0}, т.е. $\frac{\partial L}{\partial q_{\alpha_0}} = 0$, то выполняется закон сохранения соответствующего ей обобщенного импульса

$$\boxed{p_{\alpha_0} \overset{def}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot q_{\alpha_0}} = const}$$

Это очевидно следует из уравнения Э.-Л. L_{α_0}.

Координата q_{α_0} в таком случае называется **циклической**.

C2 Если лагранжиан системы не зависит явно от времени – $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, то выполняется закон сохранения энергии

$$\boxed{E \stackrel{def}{=} \sum_\alpha \dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - L = const} \qquad (***)$$

Проверяем:

$$\frac{dE}{dt} = \sum_\alpha \left(\cancel{\ddot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}} + \dot{q}_\alpha \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)\right) -$$

$$-\left(\sum_\alpha \left(\dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} + \cancel{\ddot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}} \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \right) =$$

$$= \sum_\alpha \dot{q}_\alpha \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial}{\partial q_\alpha}\right) L - \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_\alpha \dot{q}_\alpha \underbrace{L_\alpha}_{\text{зануляется на траекториях движения системы}} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial t}}_{\overset{\shortparallel}{0} \text{ по условию}} =$$

$$= 0$$

Формула (***) даёт общее определение энергии системы, пригодное не только в нерелятивистской механике.

В нерелятивистской механике её можно преобразовать к привычному виду. Дело в том, что дифференциальный оператор $\sum_\alpha \dot{q}_\alpha \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha}$ на однородных многочленах от переменных $\dot{q}^\alpha$ общей степени k — $P^{(k)}(\dot{q}^\alpha, \ldots)$ — действует так:

(произвольная зависимость от других переменных)

$$\boxed{\sum_\alpha \dot{q}^\alpha \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\alpha} P^{(k)} = k P^{(k)}}$$

В частности, на кинетической энергии: $\sum_\alpha \dot{q}^\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} = 2T$,

на потенциальной $\sum_\alpha \dot{q}^\alpha \frac{\partial U}{\partial \dot{q}^\alpha} = 0$, поэтому

$\sum_\alpha \dot{q}^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} = 2T$, если $L = T - U$, и получаем

$$\boxed{E = 2T - (T-U) = T + U}$$

знакомая формула.