Алгебра Хопфа и RTT

1. Пусть $C[G]$ — групповая алгебра над полем комплексных чисел C конечной группы G порядка N. Напомним, что если $g_1, g_2, \dots, g_N$ — элементы группы G, то алгебра $C[G]$ как векторное пространство изоморфна линейной оболочке $\mathrm{Span}_C\{g_1, \dots, g_N\}$, а ассоциативное умножение в алгебре индуцируется групповым умножением базисных векторов g_i.

а) Докажите, что линейные отображения $\Delta : C[G] \to C[G] \otimes C[G]$ и $\varepsilon : C[G] \to C$, заданные на групповых элементах формулами:

$$\Delta(g_i) = g_i \otimes g_i, \qquad \varepsilon(g_i) = 1$$

представляют собой гомоморфизмы соответствующих алгебр и являются коумножением и коединицей в алгебре $C[G]$.

б) Докажите, что линейное отображение $S : C[G] \to C[G]$, заданное на групповых элементах формулой

$$S(g_i) = g_i^{-1}$$

представляет собой антигомоморфизм алгебры $C[G]$ и является антиподом по отношению к коумножению Δ и коединице ε, определенных выше в пункте а).

в) Постройте дуальную алгебру Хопфа $C[G]^*$ и покажите, что это алгебра линейных функций на $C[G]$, с невырожденным спариванием с $C[G]$ следующего вида:

$$\langle f, a \rangle = f(a) \qquad \forall\, f \in C[G]^*, \forall\, a \in C[G].$$

Пользуясь определением дуальных алгебр Хопфа и невырожденным спариванием, приведите явный вид умножения $f_1 \cdot f_2$, единичного элемента η^*, коумножения Δ^*, коединицы ε^* и антипода S^* в алгебре $C[G]^*$.

2. Рассмотрим ассоциативную алгебру (с единицей) $\mathcal{T}_2(R)$ квантованных функций на матричной алгебре $\mathrm{Mat}_2(C)$, генераторы которой удовлетворяют квадратичным перестановочным соотношениям:

$$R_{12}T_1T_2 = T_1T_2R_{12}, \quad T_1 = T \otimes I, \quad T_2 = I \otimes T, \tag{$\star$}$$

с R-матрицей Дринфельда-Джимбо

$$R = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}, \qquad \lambda = q - q^{-1}.$$

Здесь 2×2 матрица T составлена из генераторов алгебры $\mathcal{T}_2(R)$:

$$T = \begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 \\ t_1^2 & t_2^2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Элементами алгебры $\mathcal{T}_2(R)$ по определению являются произвольные *конечные* линейные комбинации мономов ("слов" конечной длины) от некоммутативных генераторов a, b, c и d.

а) Получите явный вид перестановочных соотношений на генераторы a, b, c и d, которые следуют из ($\star$).

б) Докажите, что квадратичный по генераторам элемент

$$\det_q T = ad - qbc = da - q^{-1}bc$$

принадлежит центру алгебры $\mathcal{T}_2(R)$. Этот элемент назвается квантовым детерминантом матрицы T.

в) Покажите, что квантовый детерминант пропорционален следующему выражению

$$\det_q T = \alpha \, \mathrm{Tr}_{(12)}(T_1 T_2 A_{12}(R)), \quad A_{12}(R) = \frac{1}{2_q}\,(qI - R_{12})$$

и найдите коэффициент пропорциональности α.

3. Для алгебры $\mathcal{T}_n(R)$ квантованных функций на матричной алгебре $\mathrm{Mat}_n(C)$ заданной перестановочными соотношениями $(\star)$ с $n^2 \times n^2$ R-матрицей Дринфельда-Джимбо покажите, что линейные отображения Δ и ε заданные на генераторах алгебры соотношениями

$$\Delta(t^i_{\,j}) = \sum_{k=1}^{n} t^i_{\,k} \otimes t^k_{\,j}, \qquad \varepsilon(t^i_{\,j}) = \delta^i_j,$$

являются гомоморфизмами коумножения и коединицы, задающими на $\mathcal{T}_n(R)$ структуру биалгебры. Докажите "групповое свойство" квантового детерминанта в $\mathcal{T}_2(R)$

$$\Delta(\det_q T) = \det_q T \otimes \det_q T.$$

4. Подмножество обратимых матриц в $\mathrm{Mat}_2(C)$ образует матричную группу $GL_2(C)$. Алгеброй квантованных функций $\mathrm{Fun}_q(GL_2)$ на этой матричной группе будем называть алгебру полиномов Лорана от элемента $t \equiv \det_q T$ (см. задачу 2 выше) с коэффициентами из $\mathcal{T}_2(R)$:

$$\mathrm{Fun}_q(GL_2) = \mathcal{T}_2(R) \otimes C[t, t^{-1}]$$

Докажите, что антигомоморфизм $S : \mathrm{Fun}_q(GL_2) \to \mathrm{Fun}_q(GL_2)$, заданный на генераторах соотношениями

$$S\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = t^{-1}\begin{pmatrix} d & -b/q \\ -qc & a \end{pmatrix}$$

представляет собой отображение антипода относительно коумножения и коединицы из задачи 3, что превращает алгебру $\mathrm{Fun}_q(GL_2)$ в алгебру Хопфа.

5. Алгебра $\mathcal{T}_2(R)$ как бесконечномерное векторное пространство раскладывается в прямую сумму однородных компонент

$$\mathcal{T}_2(R) = \bigoplus_{k \ge 0} \mathcal{T}^{(k)},$$

где $\mathcal{T}^{(k)}$ есть линейная оболочка однородных мономов степени k от генераторов a, b, c и d. Докажите, что каждая компонента $\mathcal{T}^{(k)}$ есть конечномерное векторное пространство, один из возможных базисов в котором может быть выбран в виде *упорядоченных* мономов

$$a^{k_1} b^{k_2} c^{k_3} d^{k_4}, \quad k_i \ge 0, \quad k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = k.$$

Пользуясь этим базисом, найдите размерности компонент $\mathcal{T}^{(k)}$ и убедитесь, что они совпадают с размерностями соответствующих однородных компонент коммутативной (неквантованной) алгебры функций на $\mathrm{Mat}_2(C)$. Это важное свойство в научной литературе называется плоскостью квантования $(\star)$ алгебры коммутативных функций на $\mathrm{Mat}_2(C)$: плоское квантование (flat quantization) не изменяет размерностей однородных компонент, или, другими словами, не меняет число независимых элементов в квантовой алгебре по сравнению с исходной коммутативной алгеброй.