04.04.2018 – 11.04.2018 С/К "R-матрица..." =1=

Лекции N 12 – 13

Основные структуры алгебры Хопфа.

Речь пойдёт о трёх основных операциях: коумножении, коединице и антиподе.

Для иллюстрации естественности определяющих эти операции аксиом мы обратимся к теории представлений ассоциативных алгебр.

Пусть $\mathcal{A}$ – ассоциативная алгебра с единичным элементом (единицей) $e_{\mathcal{A}}$ и билинейной операцией умножения

$m : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A} : \forall a, b \in \mathcal{A} \quad m(a,b) \in \mathcal{A}$

и

- $m(\alpha a + \beta b, c) = \alpha m(a,c) + \beta m(b,c)$
  $m(a, \alpha b + \beta c) = \alpha m(a,b) + \beta m(a,c)$
  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ (или другому полю, над которым определена $\mathcal{A}$ как векторное пространство).
- $m(a, e_{\mathcal{A}}) = m(e_{\mathcal{A}}, a) = a \quad \forall a \in \mathcal{A}$.
- $m(a, m(b,c)) = m(m(a,b),c) \quad \forall a,b,c \in \mathcal{A}$

(условие ассоциативности).

Пусть нам дано <u>представление</u>
$T_V : \mathcal{A} \to End(V)$ алгебры $\mathcal{A}$ в линейном пространстве V. Напомним, что это <u>гомоморфизм</u> алгебры $\mathcal{A}$ в алгебру линейных операторов, действующих в V:

$\forall a \in \mathcal{A}$ $T_V(a) \in End(V)$ и

- $T_V(ab) = T_V(a)T_V(b)$
- $T_V(e_{\mathcal{A}}) = id_V$ (тождественный оператор на V)
- $T_V(\alpha a + \beta b) = \alpha T_V(a) + \beta T_V(b)$

$\forall a, b \in \mathcal{A}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Пространство V с таким гомоморфизмом T_V часто называют модулем над алгеброй $\mathcal{A}$ или просто $\mathcal{A}$-модулем.

$\boxed{3}$ Вообще, понятие модуля <u>шире</u>, чем векторного пространства представления. Векторные пространства — частный случай модулей над алгеброй.

Если теперь мы имеем 2 $\mathcal{A}$-модуля V и U с соответствующими гомоморфизмами T_V и T_U, то

как построить представление $=3=$
$\mathcal{A}$ в тензорном произведении $V\otimes U$?
И можно ли построить представление алгебры $\mathcal{A}$ в дуальном пространстве V^* (пространство линейных функционалов на V)?

$\boxed{3}$ Почему не годится конструкция

$$T_{V\otimes U} = T_V \otimes T_U,$$

т.е. $\forall a$: $T_{V\otimes U}(a) = T_V(a) \otimes T_U(a) \in \mathrm{End}(V\otimes U)$?

Здесь выполнены условия

$$T_{V\otimes U}(a\cdot b) = T_{V\otimes U}(a)\cdot T_{V\otimes U}(b)$$

$$T_{V\otimes U}(e_{\mathcal{A}}) = id_V \otimes id_U = id_{V\otimes U},$$

т.е. такое отображение годится, если $\mathcal{A}$ – <u>группа</u>. Для <u>алгебры</u> нужна ещё <u>линейность</u> отображения, а линейность здесь нарушена:

$$T_{V\otimes U}(a+b) \neq T_{V\otimes U}(a) + T_{V\otimes U}(b).$$

В случае произвольной ассоциативной алгебры $\mathcal{A}$ задача о нахождении структуры A-модуля (т.е. го-моморфизма $T_{V\otimes U}$) в тензорном произведении A-модулей $V\otimes U$ весьма сложна и общего решения не имеет.

Заметим, однако, что в пространстве $V\otimes U$ легко построить представление тензорного квадрата алгебры A.

В простейшем случае пространство $A\otimes A$ наделяется структурой алгебры перемножением соответствующих компонент тензорного произведения:

$$(a\otimes b)*(c\otimes d)=(a\cdot c)\otimes(b\cdot d)$$

Здесь $a\cdot c = m(a,c)$ — умножение в A.

3 $A\otimes A$ не всегда так просто превращается в алгебру. Фактически, формула содержит в себе ряд шагов:

$$a\otimes b\otimes c\otimes d \xrightarrow{id_1\otimes P_{23}\otimes id_4} a\otimes c\otimes b\otimes d \xrightarrow{m_{(12)}\otimes m_{(34)}}$$

$$\to m(a,c)\otimes m(b,d)$$

Здесь на 1м шаге мы переставили b и c простой транспозицией $P(b\otimes c)=$
$=c\otimes b$,

а затем пользуемся умноже- =5=
нием m алгебры $\mathcal{A}$ для 1-2 и
3-4 компонент.

Но, например, для так называемых
супералгебр, элементы которых наделены
$\mathbb{Z}_2$-градуировкой (чётностью) $\bar{a} \in \{\bar{0}, \bar{1}\}$
правила перестановки усложняются

$$P(a \otimes b) = (-1)^{\bar{a}\bar{b}}\, b \otimes a.$$

Существуют примеры и ещё более слож-
ных правил перестановки (такая ситуа-
ция имеет место в алгебре уравнения
отражений).

Так вот, для тензорного квадрата
$\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ вполне годится отображение
$T_{V \otimes U}$ в качестве гомоморфизма из
$\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ в $End(V \otimes U)$ (см. [3] на =3=).

Поэтому, если $\exists$ гомоморфизм
алгебр $\Delta: \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, то для алгебры
$\mathcal{A}$ легко строить тензорные произведения
её модулей и определять в них

представление алгебры $\mathcal{A}$.

Введем удобные обозначения Свидлера (Sweedler's notation): $\forall a \in \mathcal{A}$:

$$\Delta(a) = \sum_i a_i \otimes b_i \equiv a_{(1)} \otimes a_{(2)}$$
$$a_i, b_i \in \mathcal{A}$$

Подчеркнем, что за компактными обозначениями Свидлера стоит, вообще говоря, <u>сумма</u> элементов из $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$.

Свойство ~~голом~~ гомоморфности Δ:

$$\Delta(\alpha a + \beta b) = \alpha \Delta(a) + \beta \Delta(b)$$

$$\Delta(a \cdot b) = \Delta(a) * \Delta(b)$$

умножение в $\mathcal{A}^{\otimes 2}$

Умножение в $\mathcal{A}$

Теперь отображение (гомоморфизм) $\mathcal{A}$ в $End(V \otimes U)$ выглядит так:

$$T_{V \otimes U} = (T_V \otimes T_U) \circ \Delta, \text{ то есть:}$$

$$a \xrightarrow{\Delta} a_{(1)} \otimes a_{(2)} \xrightarrow{T_V \otimes T_U} T_V(a_{(1)}) \otimes T_U(a_{(2)})$$

Важное свойство Δ – свойство ко-ассоциативности связано с очевидным изоморфизмом

$$V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \cong (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \cong V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$$

То есть, чтобы построить представление A в тензорном произведении 3х A-модулей V_1, V_2 и V_3 можно временно обозначить $V_1 \otimes V_2 = U$ и строить представление в $U \otimes V_3$ по вышеописанной схеме:

$$T_{U \otimes V_3}(a) = T_U(a_{(1)}) \otimes T_V(a_{(2)})$$

Теперь надо вспомнить, что $U = V_1 \otimes V_2$.

$\Rightarrow$ нам надо применить Δ к $a_{(1)}$:

$$\Delta(a_{(1)}) \equiv a_{(11)} \otimes a_{(12)}$$

Тогда $T_{V_1 \otimes V_2 \otimes V_3}(a) = T_{V_1}(a_{(11)}) \otimes T_{V_2}(a_{(12)}) \otimes T_{V_3}(a_{(2)})$

или: $T_{V_1 \otimes V_2 \otimes V_3} = (T_{V_1} \otimes T_{V_2} \otimes T_{V_3}) \circ (\Delta \otimes id) \circ \Delta$

$$(\Delta \otimes id) \circ \Delta(a) = (\Delta \otimes id)(a_{(1)} \otimes a_{(2)}) =$$

$$= \Delta(a_{(1)}) \otimes a_{(2)} = a_{(11)} \otimes a_{(12)} \otimes a_{(2)}.$$

Но мы могли обозначить $U = V_2 \otimes V_3$ и строить представление в $V_1 \otimes U$.

Мы придём к формуле:

$T_{V_1 \otimes V_2 \otimes V_3} = T_{V_1} \otimes T_{V_2} \otimes T_{V_3} \circ (id \otimes \Delta) \circ \Delta$.

Два этих способа должны давать одно и то же $\Rightarrow$ необходимо равенство 2х отображений (гомоморфизмов) $\mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$:

$$(\Delta \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \Delta) \circ \Delta.$$

$\boxed{О}$ Коумножением в алгебре $\mathcal{A}$ ~~...~~ называется гомоморфизм $\Delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, т.е. линейное отображение со свойствами

$$\Delta(a \cdot b) = \Delta(a) * \Delta(b)$$

$$\Delta(e_A) = e_A \otimes e_A.$$

Коумножение называется ко-ассоциативным, если для $\forall a \in \mathcal{A}$:

$$(id \otimes \Delta) \circ \Delta(a) = (\Delta \otimes id) \circ \Delta(a)$$

$\boxed{З}$ Условие равенства 2х отображений удобно иллюстрировать на диаграммах, узлы которых отвечают промежуточным объектам (алгебрам, пространствам, и т.д.), а стрелки – отображениям, композицию которых изображает диаграмма.

Равенство отображений означает коммутативность диаграммы, т.е. её обход от исходного объекта до конечного по разным путям дает одинаковый результат.

Например, ко-ассоциативность Δ:

$$(\Delta\otimes id)\circ\Delta = (id\otimes\Delta)\circ\Delta$$

означает коммутативность следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "\Delta"'] \arrow[dr, "\Delta"] & \\
A\otimes A \arrow[dr, "\Delta\otimes id"'] & & A\otimes A \arrow[dl, "id\otimes\Delta"] \\
 & A\otimes A\otimes A &
\end{tikzcd}$$

Заметим, что эта диаграмма только направлением стрелок (и заменой $\Delta\to m$) отличается от диаграммы, выражающей ассоциативность умножения m:

$$m\circ(m\otimes id) = m\circ(id\otimes m)$$

– это равенство 2х отображений $A^{\otimes 3}\to A$:

$$\begin{tikzcd}
 & A\otimes A\otimes A \arrow[dl, "id\otimes m"'] \arrow[dr, "m\otimes id"] & \\
A\otimes A \arrow[dr, "m"'] & & A\otimes A \arrow[dl, "m"] \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

Рассмотрим теперь ещё одно отображение, связанное с наличием у алгебры A одномерных представлений: гомоморфизм ко-единицы $\varepsilon: A \to \mathbb{C}$.

Прежде всего, переформулируем факт о существовании единичного элемента e_A в следующем виде:

$\boxed{V}$ [В ассоциативной алгебре A $\exists$ единичный элемент e_A: $\forall a \in A$, $e_A a = a e_A = a$] $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ [$\exists$ гомоморфизм $\eta: \mathbb{C} \to A$

$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$\eta(z_1 + z_2) = \eta(z_1) + \eta(z_2)$$

$$\eta(z_1 \cdot z_2) = m(\eta(z_1), \eta(z_2)),$$

Умножение в $\mathbb{C}$

Умножение элементов A $\eta(z_1)$ и $\eta(z_2)$

такой, что

$$m(a, \eta(z)) = m(\eta(z), a) = z \cdot a \quad (\bigstar)$$

$\forall z \in \mathbb{C}$, $\forall a \in A$].

Умножение на z элементов A (как векторов линейного пространства над $\mathbb{C}$).

Доказательство элементарно:

1) $\Rightarrow$. Если $\exists\, e_A$, то определим

$\eta(z)$ так: $\eta(z) = z \cdot e_A$

Гомоморфность и (★) следуют из аксиом векторного пространства и свойств e_A.

2) $\Leftarrow$. Пусть есть гомоморфизм $C \to A$ — со свойством (★). Тогда $\eta(1) \in A$ — — единичный элемент: $\eta(1) = e_A$. Проверка элементарна.

В терминах диаграмм наличие в A единичного элемента ($\Leftrightarrow$ гомоморфизма η) эквивалентно коммутативности следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes C \arrow[d, "id \otimes \eta"'] \arrow[r, phantom, "\cong"] & A \arrow[d, equal, "id"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & C \otimes A \arrow[d, "\eta \otimes id"] \\
A \otimes A \arrow[r, "m"] & A & A \otimes A \arrow[l, "m"']
\end{tikzcd}$$

Обратимся теперь к гомоморфизму $\varepsilon: A \to C$. Это отображение называется <u>ко-единицей</u>, если, дополнительно, выполнено тождество

$$(\varepsilon\otimes id)\circ\Delta = (id\otimes\varepsilon)\circ\Delta = id_A$$

(равенство 2х отображений $A\to A$).

$\boxed{3}$ Строго говоря, слева стоят отображение $A\to \mathbb{C}\otimes A$ или $A\otimes\mathbb{C}$, но эти объекты отождествляются с A, поскольку тензорное произведение рассматривается над $\mathbb{C}$:

$$z\otimes a = 1\cdot z\otimes a = 1\otimes za \Leftrightarrow za$$

$\forall z\in\mathbb{C}$, $\forall a\in A$.

Таким образом, мы требуем от ко-единицы следующего:

$$(\varepsilon\otimes id)\Delta(a) = (\varepsilon\otimes id)(a_{(1)}\otimes a_{(2)}) =$$

$$= 1\otimes\varepsilon(a_{(1)})a_{(2)} = 1\otimes a$$

$$\boxed{\varepsilon(a_{(1)})a_{(2)} = a = a_{(1)}\varepsilon(a_{(2)}).}$$

$\forall a\in A$, $\Delta(a) = a_{(1)}\otimes a_{(2)}$

С точки зрения теории представлений это свойство можно интерпретировать так:

Пусть есть A-модуль V и T_V — соответствующий гомоморфизм

$$T_V : A\longrightarrow End(V).$$

Таким образом, для $\forall a \in \mathcal{A}$

$T_V(a)$ – линейный оператор в V и для $\forall v \in V$ определено действие этого оператора $T_V(a) \triangleright v = v' \in V$.

С другой стороны, запишем v как элемент $\mathbb{C} \otimes V$: $1 \otimes v$ и построим представление $\mathcal{A}$ в тензорном произведении модулей $\mathbb{C}$ и V:

$$a \xrightarrow{\Delta} a_{(1)} \otimes a_{(2)} \longrightarrow \varepsilon(a_{(1)}) \otimes T_V(a_{(2)})$$

Теперь
$$T_{\mathbb{C}\otimes V}(a) = \varepsilon(a_{(1)}) \otimes T_V(a_{(2)}) =$$
$$= 1 \otimes \varepsilon(a_{(1)}) T_V(a_{(2)}) =$$
$$= 1 \otimes T_V(\varepsilon(a_{(1)}) a_{(2)}).$$

$$1 \otimes T_V(\varepsilon(a_{(1)}) a_{(2)}) \triangleright (1 \otimes v) =$$
$$= 1 \otimes \underline{T_V(\varepsilon(a_{(1)}) a_{(2)}) \triangleright v}$$

Мы требуем, чтобы линейные операторы $T_V(a)$, $T_V(\varepsilon(a_{(1)}) a_{(2)})$ и

$T_V(a_{(1)} \varepsilon(a_{(2)}))$ совпадали для $\forall a \in \mathcal{A}$. $\Rightarrow$ $(id \otimes \varepsilon) \circ \Delta = (\varepsilon \otimes id) \circ \Delta = id$.

$\boxed{0}$ Ассоциативная алгебра с единицей, ко-умножением Δ и ко-единицей ε называется би-алгеброй. Диаграмма для ε:

$$\begin{tikzcd}
A\otimes A \arrow[d, "id\otimes\varepsilon"'] & A \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, equal, "id"] & A\otimes A \arrow[d, "\varepsilon\otimes id"] \\
A\otimes \mathbb{C} \arrow[r, phantom, "\cong"] & A \arrow[r, phantom, "\cong"] & \mathbb{C}\otimes A
\end{tikzcd}$$

Примеры.

(1) Алгебра регулярных функций на матричной алгебре $Mat_N(\mathbb{C})$ является би-алгеброй. В силу свойства гомоморфности, действие ко-структур Δ и ε достаточно задать на генераторах t^i_j:

$$\Delta(t^i_j) = \sum_{k=1}^{N} t^i_k \otimes t^k_j$$

$$\varepsilon(t^i_j) = \delta^i_j$$

Проверьте самостоятельно ко-ассоциативность Δ и выполнение аксиом, связывающих Δ и ε. Проверьте, также что Δ-гомоморфизм, то есть,

$$\Delta(T_1 T_2) = \Delta(T_1)\Delta(T_2) = \Delta(T_2 T_1)$$

Сохраняет коммутативность образа алгебры функций в тензорном квадрате.

Таким образом, для $\forall\, a \in \mathcal{A}$

$T_V(a)$ – линейный оператор в V и для $\forall\, v \in V$ определено действие этого оператора $T_V(a) \triangleright v = v' \in V$.

С другой стороны, запишем v как элемент $\mathbb{C} \otimes V$: $1 \otimes v$ и построим представление $\mathcal{A}$ в тензорном произведении модулей $\mathbb{C}$ и V:

$$a \xrightarrow{\Delta} a_{(1)} \otimes a_{(2)} \longrightarrow \varepsilon(a_{(1)}) \otimes T_V(a_{(2)})$$

Теперь $T_{\mathbb{C}\otimes V}(a) = \varepsilon(a_{(1)}) \otimes T_V(a_{(2)}) =$

$$= 1 \otimes \varepsilon(a_{(1)}) T_V(a_{(2)}) =$$

$$= 1 \otimes T_V(\varepsilon(a_{(1)}) a_{(2)}).$$

$$1 \otimes T_V(\varepsilon(a_{(1)}) a_{(2)}) \triangleright (1 \otimes v) =$$

$$= 1 \otimes \underline{T_V(\varepsilon(a_{(1)}) a_{(2)}) \triangleright v}$$

Мы требуем, чтобы линейные операторы $T_V(a)$, $T_V(\varepsilon(a_{(1)}) a_{(2)})$ и

$T_V(a_{(1)} \varepsilon(a_{(2)}))$ совпадали для $\forall\, a \in \mathcal{A}$. $\Rightarrow$ $(\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta = (\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = \mathrm{id}$.

(г). Универсальная обёртывающая алгебра алгебры Ли.

Пусть g — конечномерная алгебра Ли с базисом $e_1, \ldots, e_n$: $[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k$

Σ по k

Универсальная обёртывающая алгебра $U(g)$ — би-алгебра. Поскольку, по определению, $U(g)$ порождается элементами $e_1, \ldots, e_n$ (если говорить строго, образами этих элементов при вложении $g \to U(g)$) то опеть определим Δ и ε на этих элементах:

$$\Delta(e_i) = e_i \otimes 1_U + 1_U \otimes e_i$$

$$\varepsilon(e_i) = 0 \qquad \varepsilon(1_U) = 1$$

Здесь 1_U — единичный элемент ассоциативной алгебры $U(g)$.

$$\left.\begin{array}{l} \Delta(\alpha a + \beta b) = \alpha\Delta(a) + \beta\Delta(b) \\ \Delta(a \cdot b) = \Delta(a)\Delta(b) \end{array}\right\} \text{это полагаем по определению}$$

для $\forall\, a, b \in U(g)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Надо проверить, что выражения, равные 0 в $U(g)$ отображаются Δ и ε в нулевые выражение в $U(g)^{\otimes}$.

В $U(g)$ имеем соотношения:

$$e_i e_j - e_j e_i - c_{ij}^{k} e_k = 0.$$

Это должно отображаться в 0 действием Δ и ε. Про ε всё очевидно, т.к. $\varepsilon(e_i e_j) = \varepsilon(e_i)\varepsilon(e_j) = 0 \cdot 0 = 0$.

Проверим Δ:

$$\Delta(e_i e_j) = \underbrace{(e_i \otimes 1_u + 1_u \otimes e_i)}_{\Delta(e_i)}(e_j \otimes 1_u + 1_u \otimes e_j) =$$

$$= e_i e_j \otimes 1_u + e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i + 1_u \otimes e_i e_j$$

Теперь $\Delta(e_i e_j - e_j e_i) = \Delta(e_i e_j) - \Delta(e_j e_i) =$

$$= \underbrace{(e_i e_j - e_j e_i)}_{\text{соотношение в } U(g)} \otimes 1_u + 1_u \otimes (e_i e_j - e_j e_i) =$$

$$= c_{ij}^{k} e_k \otimes 1_u + 1_u \otimes c_{ij}^{k} e_k = \Delta(c_{ij}^{k} e_k)$$

Итак, $\Delta(e_i e_j - e_j e_i - c_{ij}^{k} e_k) = 0$ — отображение Δ "уважает" произведение в $U(g)$

$\boxed{3}$ $\Delta(e_i) = e_i \otimes 1_u + 1_u \otimes e_i$ позволяет строить тензорные произведения модулей конечномерных алгебр Ли и широко используется в квантовой физике (теории углового момента, изоспина и т.п.)

Проверим ещё связь ε и Δ:

$$(\varepsilon\otimes id)\circ\Delta(e_i) = \underbrace{\varepsilon(e_i)}_{0}\otimes 1_u + \varepsilon(1_u)\otimes e_i =$$

$$= 1\otimes e_i = e_i$$

Аналогично для $(id\otimes\varepsilon)\circ\Delta$.

$\boxed{3}$ Ко-умножение в $U(g)$ - ко-коммутативно (симметрично относительно перестановки факторов: $a_{(1)}\otimes a_{(2)} = a_{(2)}\otimes a_{(1)}$)

$$P\circ\Delta = \Delta$$

Сама алгебра $U(g)$ не коммутативна (для неабелевой g).

В алгебре функций на матрицах ситуация зеркальна: сама алгебра коммутативна $t^i_j t^k_s = t^k_s t^i_j$, а коумножение Δ - не кокоммутативно: $P\circ\Delta \neq \Delta$:

$$\Delta(t^i_j) = t^i_k\otimes t^k_j \neq t^k_j\otimes t^i_k.$$

Квантовые матричные алгебры дают примеры некоммутативных и не кокоммутативных биалгебр (алгебр Хопфа).

(3) Рассмотрим <u>конечную</u> группу G (группу с конечным числом элементов), элементы которой обозначим $G_0, G_1, \dots, G_{N-1}$, где $N = |G|$ — порядок группы. G_0 — <u>единица</u> группы: $G_0 G_i = G_i G_0 = G_i$ $\forall i$.

Построим <u>групповую алгебру</u> $\mathbb{C}[G]$ группы G. Это конечномерное векторное пространство над $\mathbb{C}$, образованное линейными комбинациями $\sum_{i=0}^{N-1} z_i G_i$ с $z_i \in \mathbb{C}$ (элементы G_i — базис $\mathbb{C}[G]$).

Ассоциативное умножение в $\mathbb{C}[G]$ определяется групповым умножением базисных элементов G_i:

$$v \cdot u = \sum_{i=0}^{N-1} v_i G_i \cdot \sum_{j=0}^{N-1} u_j G_j =$$

$$= \sum_{j,i=0}^{N-1} v_i u_j \underbrace{(G_i G_j)}_{= G_{k(i,j)} \in G}.$$

а) Проверьте, что $\mathbb{C}[G]$ – биалгебра с коумножением $\Delta(g_i) = g_i \otimes g_i$ и ко-единицей $\varepsilon(g_i) = 1$ $\forall g_i$

б)* Рассмотрим алгебру функций на группе G: $f : G \to \mathbb{C}$. $f \in \mathrm{Fun}(G)$.
Это коммутативная алгебра относительно поточечного умножения:

$$\forall f_1, f_2 \in \mathrm{Fun}(G): \ (f_1 \cdot f_2)(g_i) \stackrel{def}{=} f_1(g_i) f_2(g_i)$$

Определим коумножение $\Delta : \mathrm{Fun}(G) \to \mathrm{Fun}(G) \otimes \mathrm{Fun}(G)$
как гомоморфизм, действующий на функции следующим образом:

$$\Delta f \in \mathrm{Fun}(G) \otimes \mathrm{Fun}(G)$$

$$(\Delta f)(g_i, g_j) \stackrel{def}{=} f(g_i \cdot g_j)$$

Умножение в G.

(i) Проверьте коассоциативность этого умножения.

(ii) Найдите ко-единицу для такого Δ, т.е. определите $\varepsilon(f)$ для $\forall f \in \mathrm{Fun}(G)$.

Антипод.

Пусть дан $\mathcal{A}$-модуль V. Как построить представление $\mathcal{A}$ в дуальном пространстве V^* — пространстве линейных функционалов на V?

Как известно, существует невырожденная билинейная форма

$$\langle\ ,\ \rangle_l : V^* \otimes V \to \mathbb{C}$$

(Левая форма $\langle \xi, v \rangle \in \mathbb{C}$ $\forall \xi \in V^*$, $v \in V$)

Невырожденность: если $\langle \xi, v \rangle = 0$ $\forall v \Leftrightarrow \xi = 0$.

Для заданного базиса $e_1, \ldots, e_n$ в V $\exists$ дуальный базис в V^*, образуемый функционалами ϵ^i: $\langle \epsilon^i, e_j \rangle = \delta^i_j$

Представление в V^* можно легко построить, если в $\mathcal{A}$ $\exists$ антигомоморфизм $S: A \to A$:
$$S(\alpha a + \beta b) = \alpha S(a) + \beta S(b)$$
$$S(a \cdot b) = S(b) \cdot S(a)$$

Порядок поменялся.

$$S \circ m = m \circ (S \otimes S) \circ P$$ — равенство 2х отображений $A^{\otimes 2} \to A$.

В этом случае гомоморфизм $T_{V^*} : A \to \mathrm{End}(V^*)$ строится так:

$$\forall a \in A \quad \langle T_{V^*}(a) \triangleright \xi, v \rangle = \langle \xi, T_V(S(a)) \triangleright v \rangle$$

Символ $T_V(a) \triangleright v$ означает действие линейного оператора.

Линейность отображения T_{V^*} легко следует из линейности S, T_V и билинейности формы $\langle\ ,\ \rangle$.

Проверим сохранение умножения:

$$T_{V^*}(a \cdot b) \stackrel{?}{=} T_{V^*}(a) T_{V^*}(b)$$

Умножение операторов означает их последовательное применение.

$$\langle T_{V^*}(a) \triangleright (T_{V^*}(b) \triangleright \xi), v \rangle = \langle T_{V^*}(b) \triangleright \xi, T_V(S(a)) \triangleright v \rangle =$$

$$= \langle \xi, T_V(S(b)) \triangleright (T_V(S(a)) \triangleright v) \rangle = (T_V \text{ — представление})$$

$$= \langle \xi, T_V(S(b)S(a)) \triangleright v \rangle = (S \text{ — антигомоморфизм})$$

$$= \langle \xi, T_V(S(a \cdot b)) \triangleright v \rangle = \langle T_{V^*}(a \cdot b) \triangleright \xi, v \rangle .$$

Кроме того, очевидно $T_{V^*}(e_A) = id_{V^*}$.

Как связаны матрицы операторов $T_{V^*}(a)$ и $T_V(a)$ во взаимно-дуальных базисах $\{\epsilon^i\}$ и $\{e_i\}$.

По определению матрицы оператора:

$$T_V(a) \triangleright e_i = e_k \, \mathbb{T}(a)^k{}_i \quad \text{(суммирование по } k\text{)}$$

$$T_{V^*}(a) \triangleright \epsilon^i = \epsilon^j \, \overset{*}{\mathbb{T}}_j{}^i \text{ — суммирование по } j$$

Теперь имеем с одной стороны:

$$\langle T_{V^*}(a) \triangleright \epsilon^i, e_j \rangle = \langle \epsilon^k \, \overset{*}{\mathbb{T}}(a)_k{}^i, e_j \rangle = \underline{\overset{*}{\mathbb{T}}_j(a)_j{}^i}$$

С другой стороны, по определению T_{V^*}:

$$\langle T_{V^*}(a) \triangleright \epsilon^i, e_j \rangle = \langle \epsilon^i, T_V(S(a)) \triangleright e_j \rangle =$$

$$= \mathbb{T}(S(a))^k{}_j \langle \epsilon^i, e_k \rangle = \underline{\mathbb{T}(S(a))^i{}_j}$$

Матрица оператора в V^*, отвечающая $a \in \mathcal{A}$ совпадает с <u>транспонированной</u> матрицей оператора в V, отвечающего $S(a)$:

$$\overset{*}{\mathbb{T}}(a)_j{}^i = \mathbb{T}(S(a))^i{}_j$$

Наличие коумножения и антигомоморфизма S позволяет строить представление $\mathcal{A}$ в пространстве $V\otimes V^*$, где V — заданный $\mathcal{A}$-модуль.

Для <u>конечномерных</u> V имеется изоморфизм $V\otimes V^* \cong End(V)$:

$$(u\otimes\xi)\triangleright v = u\langle\xi, v\rangle \quad \forall\, u,v\in V,\ \xi\in V^*$$

Если $F\in End(V)$ в базисе $\{e_i\}$ имеет матрицу $F^i{}_j$: $F\triangleright e_i = e_k F^k{}_i$, то

$$End(V)\ni F \Leftrightarrow \sum_{ij} F^i{}_j\, e_i\otimes e^j \in V\otimes V^*.$$

Как выглядит гомоморфизм $Q_{End(V)}$: $\mathcal{A}\to End(V\otimes V^*)$?

$$a \overset{\Delta}{\longmapsto} a_{(1)}\otimes a_{(2)} \longmapsto T_V(a_{(1)})\otimes T_{V^*}(a_{(2)}) \in End(V\otimes V^*)$$

$\boxed{V}$ Для $\forall\, F\in End(V)$

$$Q_{End(V)}(a)\triangleright F = T_V(a_{(1)})\, F\, T_V(S(a_{(2)}))$$

Рассмотрим в $End(V)$ <u>тождественный</u> оператор $\mathbb{1}_V$. Потребуем, чтобы порождаемое им одномерное линейное подпространство в $End(V)$ было <u>инвариантным</u> относительно представления $Q_{End(V)}$:

$$\forall a \in A : Q_{End(V)}(a) \triangleright \mathbb{1}_V = \lambda(a)\mathbb{1}_V$$
$$\lambda(a) \in \mathbb{C}$$

Из свойства гомоморфности Q => что $\lambda(a)$ гомоморфизм $A \to \mathbb{C}$. Положим $\lambda = \varepsilon$ (коединица). Учтем также, что

$$\mathbb{1}_V = T_V(e_A).$$

Теперь получаем:

$$Q_{End(V)}(a) \triangleright \mathbb{1}_V = T_V(a_{(1)})\mathbb{1}_V T_V(S(a_{(2)})) =$$
$$= T_V(a_{(1)} S(a_{(2)})) = \varepsilon(a) T_V(e_A) \ \forall a \in A.$$

Таким образом:

$$a_{(1)} S(a_{(2)}) = \varepsilon(a) e_A = (\eta \circ \varepsilon)(a)$$

$\boxed{3}$ Если рассмотреть <u>правую</u> форму $\langle , \rangle_r : V^* \otimes V \to \mathbb{C}$, то получим

$$S(a_{(1)}) a_{(2)} = \varepsilon(a) e_A = (\eta \circ \varepsilon)(a).$$

[О] Антигомоморфизм $S: A\to A$ ~~алгебры~~ би-алгебры A называется <u>антиподом</u>, если выполнены равенства отображений $A\to A$:

$$m\circ(S\otimes id)\circ\Delta = m\circ(id\otimes S)\circ\Delta = \eta\circ\varepsilon$$

где Δ — коумножение, ε — ко-единица, η — гомоморфизм единицы $\mathbb{C}\to A$.

[О] Би-алгебра A, в которой задано отображение антипода S, называется алгеброй Хопфа.

[У] $\varepsilon\circ S=\varepsilon$, т.е. $\forall a\in A$: $\varepsilon(S(a))=\varepsilon(a)$

$(S\otimes S)\circ\Delta = P\circ\Delta\circ S$, т.е. для $\forall a\in A$:

$$\Delta(a)=a_{(1)}\otimes a_{(2)} \Rightarrow$$

$$S(a_{(1)})\otimes S(a_{(2)}) = S(a)_{(2)}\otimes S(a)_{(1)},$$

где $\Delta(S(a)) = S(a)_{(1)}\otimes S(a)_{(2)}$

Рассмотрим отображение антипода в наших примерах би-алгебр.

(1.5) Би-алгебра регулярных функций на $Mat_n(\mathbb{C})$.

На всей этой алгебре нельзя задать отображение антипода.

Рассмотрим в $Mat_n(\mathbb{C})$ подмножество обратимых матриц (группа $GL(n)$).

Тогда функция $Det\,T = \sum_{\{i\}} \varepsilon_{i_1\ldots i_n} T^{i_1}_1 \ldots T^{i_n}_n$

принимает только отличные от 0 значения на подмножестве $GL(n)$:

$$(Det\,T)(M) = det\,M \quad \forall M \in GL(n).$$

$$\Downarrow$$

и коммутативную алгебру функций можно расширить, введя новый элемент D^{-1}: $D^{-1} t^i_j = t^i_j D^{-1}$

$$D^{-1}\cdot Det\,T = Det\,T\cdot D^{-1} = id$$

После этого можно построить T^{-1} — матрицу обратную $T = \|t^i_j\|$:

$$(T^{-1})^i_j = D^{-1}\cdot \left(\text{Алг. дополнение элемента } t^j_i\right)$$

$\boxed{V}$ $S(t^i_j) = (T^{-1})^i_j$: $S(T) = T^{-1}$

Антигомоморфность следует из свойств произведения обратных матриц: $S(T_1T_2) = (T_1T_2)^{-1} = T_2^{-1}T_1^{-1} =$

$$= S(T_2)S(T_1)$$

$$m\circ(S\otimes id)\circ\Delta(T_1) = m\circ(S\otimes id)\, T_1\otimes T_1 =$$

$$= m(T_1^{-1}, T_1) = \mathbb{1}_1\, id_{Fun(Gl(n))} = \varepsilon(T_1)\, id_{Fun(Gl(n))}$$

Пример для $N=2$:

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \mathrm{Det}\, T = ad - bc$$

$$S(T) = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \text{ т.е. } \quad S(a) = \frac{d}{ad-bc}$$

$$S(b) = \frac{-b}{ad-bc}$$

$$S(c) = \frac{-c}{ad-bc}$$

$$S(d) = \frac{a}{ad-bc}$$

(2.5) Универсальная обёртывающая алгебра $U(g)$ алгебры Ли g.

$\boxed{Y}$ $S(e_i) = -e_i \quad S(1_u) = 1_u$

$S(ab) \stackrel{def}{=} S(b)S(a) \quad \forall\, a, b \in U(g)$.

(i) Проверьте сами, что ~~все~~ это антигомоморфизм, т. е.

$$S(e_i e_j - e_j e_i - C_{ij}^{k} e_k) = 0$$

и что выполняются все ~~свойства~~ свойства взаимодействия S, Δ и ε.

(ii) Проверьте свойство

$$(S\otimes S)\circ\Delta = P\circ\Delta\circ S$$

(iii) Пусть задано представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (а значит и $U(\mathfrak{g})$) в конечномерном векторном пространстве V:

$$\forall\, e_i \mapsto T_V(e_i)\in End(V).$$

$$T_V([e_i,e_j]) = T_V(e_i)T_V(e_j) - T_V(e_j)T_V(e_i)$$

Найдите явный вид операторов $Q_{End(V)}(e_i)$ задающих представление алгебры $U(\mathfrak{g})$ в пространстве $End(V)$.

(3.5) <u>Алгебра функций на конечной группе G.</u>

$\boxed{V}$ Докажите, что $S(f)(g) = f(g^{-1})$

$$\forall g\in G;\ \forall f\in Fun(G)$$

Дуальные алгебры Хопфа

Пусть $\mathcal{A}$ — ассоциативная алгебра с единицей. Дуальное векторное пространство $\mathcal{A}^*$ не обладает, вообще говоря, структурой алгебры: нет умножения линейных функционалов (элементов $\mathcal{A}^*$), которое давало бы опять линейный функционал. Например, поточечное умножение заведомо не годится:

$$(f_1 \cdot f_2)(a) = f_1(a) f_2(a) \qquad \begin{array}{l} f_1, f_2 \in \mathcal{A}^* \\ a \in \mathcal{A} \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$(f_1 \cdot f_2)(\alpha a + \beta b) \neq \alpha (f_1 \cdot f_2)(a) + \beta (f_1 f_2)(b)$$

Однако, пространство $\mathcal{A}^*$ легко превратить в ко-алгебру. Если же исходная $\mathcal{A}$ — алгебра Хопфа (или би-алгебра), то $\mathcal{A}^*$ тоже становится алгеброй Хопфа (би-алгеброй).

Итак, пусть в $\mathcal{A}$ заданы умножение m, единичный элемент $e_{\mathcal{A}}$, коумножение Δ, ко-единица ε и антипод S.

Кроме того, есть невырожденная билинейная форма $\langle\, , \rangle_e : \mathcal{A}^* \otimes \mathcal{A} \to \mathbb{C}$.

Наша задача — определить в линейном пространстве $\mathcal{A}^*$ умножение m^*, единичный функционал e^*, коумножение Δ^* и ко-единицу ε^*.

Дальше элементы A^* будем обозначать греческими буквами $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, а элементы алгебры A – латинскими $a, b, c \ldots$

m^*: Это билинейная операция, которая $\forall$ двум линейным функционалам ξ и η из A^* ставит в соответствие линейный функционал $m^*(\xi, \eta)$. Поскольку любой линейный функционал из A^* определяется своим действием на вектора A (выражаемым в виде спаривания $\langle \xi, a \rangle$), зададим m^* так:

$$\langle m^*(\xi, \eta), a \rangle = \langle \xi \otimes \eta, \Delta(a) \rangle \equiv$$

$$\equiv \langle \xi, a_{(1)} \rangle \cdot \langle \eta, a_{(2)} \rangle$$

$\forall a$ и $\forall \xi, \eta$.

Линейность $m^*(\xi, \eta)$ очевидна из линейности Δ и билинейности $\langle , \rangle$.

Ассоциативность m^* следует из ко-ассоциативности Δ.

Действительно, для $\forall a \in A$:

$$\langle \underline{m^*(\xi, m^*(\zeta, \eta))}, a \rangle \overset{def}{=} \langle \xi, a_{(1)} \rangle \langle m^*(\zeta, \eta), a_{(2)} \rangle$$

$$= \langle \xi, a_{(1)} \rangle \langle \zeta \otimes \eta, \Delta(a_{(2)}) \rangle \equiv$$

$$\equiv \langle \xi \otimes \zeta \otimes \eta, \underline{(id \otimes \Delta) \circ \Delta(a)} \rangle =$$

$$= \langle \xi \otimes \zeta \otimes \eta, (\Delta \otimes id) \circ \Delta(a) \rangle =$$

$$= \langle \underline{m^*(m^*(\xi, \zeta), \eta)}, a \rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall \xi, \zeta, \eta \quad m^*(\xi, m^*(\zeta, \eta)) = m^*(m^*(\xi, \zeta), \eta).$$

– условие ассоциативности.

$e^*_{A^*}$: Определим линейный функционал $e^*_{A^*}$ формулой: $\langle e^*_{A^*}, a \rangle \overset{def}{=} \varepsilon(a)$.

Это единица в A^* относительно m^*:

$$\forall \xi \in A^*: \quad m^*(\xi, e^*_{A^*}) = \xi = m^*(e^*_{A^*}, \xi).$$

Действительно, имеем по определению умножения:

$$\langle m^*(e^*_{A^*}, \xi), a \rangle = \langle e^*_{A^*} \otimes \xi, a_{(1)} \otimes a_{(2)} \rangle$$

$$= \underline{\langle e^*_{A^*}, a_{(1)} \rangle} \langle \xi, a_{(2)} \rangle = \varepsilon(a_{(1)}) \langle \xi, a_{(2)} \rangle =$$

$$= \langle \xi, \underline{\varepsilon(a_{(1)}) a_{(2)}} \rangle = \langle \xi, a \rangle \ \underline{\forall a} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad m^*(e_{A^*}, \xi) = \xi \quad \forall \xi.$

Итак, замечаем, что свойства умножения и единицы в A^* определяются свойствами ко-умножения и ко-единицы в A.

Для ко-структур в A^* ситуация зеркальна: их свойства определяются алгебраической структурой A:

Δ^*: $\Delta^*(\xi) \in A^* \otimes A^* \Rightarrow$ чтобы определить $\Delta^*(\xi)$ надо указать, как $\Delta^*(\xi)$ спаривается с $\forall\, a \otimes b$ из $A \otimes A$:

$$\langle \Delta^*(\xi), a \otimes b \rangle \overset{def}{=} \langle \xi, m(a, b) \rangle.$$

Ко-ассоциативность $(id \otimes \Delta^*) \circ \Delta^* =$
$= (\Delta^* \otimes id) \circ \Delta^*$

следует из ассоциативности m.

ε^*: $\varepsilon^* : A^* \to \mathbb{C}$

~~$\langle \varepsilon^*, a \rangle \overset{def}{=}$~~ $\varepsilon^*(\xi) \overset{def}{=} \langle \xi, e_A \rangle$

$\forall\, \xi \in A^*$

Надо ещё доказать, что Δ^* и ε^* —
-гомоморфизмы и выполнено равенство:

$$(id \otimes \varepsilon^*) \circ \Delta^* = (\varepsilon^* \otimes id) \circ \Delta^*.$$

Гомоморфность ε^* доказывается легко: обозначим для упрощения записи

$$m^*(\xi, \eta) \equiv \xi * \eta$$

Надо доказать $\varepsilon^*(\xi * \eta) = \varepsilon^*(\xi) \cdot \varepsilon^*(\eta)$.

$$\underline{\varepsilon^*(\xi * \eta)} = \langle \xi * \eta, e_A \rangle \overset{def}{=} \langle \xi \otimes \eta, \underbrace{\Delta(e_A)}_{= e_A \otimes e_A} \rangle =$$

$$= \langle \xi, e_A \rangle \langle \eta, e_A \rangle = \underline{\varepsilon^*(\xi)\, \varepsilon^*(\eta)}.$$

Гомоморфность Δ^* докажите самостоятельно. Проверим еще $(id \otimes \varepsilon^*) \circ \Delta^* = (\varepsilon^* \otimes id) \circ \Delta^* \overset{?}{=} id$

$(\varepsilon^* \otimes id) \circ \Delta^*(\xi) \in A^* \Rightarrow$ надо определить его действие на $\forall a \in A$.

$$\Delta^*(\xi) = \xi_{(1)} \otimes \xi_{(2)}$$

$$(\varepsilon^* \otimes id) \Delta^*(\xi) = \varepsilon^*(\xi_{(1)})\, \xi_{(2)}.$$

Теперь получаем $\forall a$:

$$\underline{\langle \varepsilon^*(\xi_{(1)}) \cdot \xi_{(2)}, a \rangle} = \langle \xi_{(1)}, e_A \rangle_{= \varepsilon^*(\xi_{(1)})} \langle \xi_{(2)}, a \rangle =$$

$$= \langle \xi_{(1)} \otimes \xi_{(2)}, e_A \otimes a \rangle = \langle \Delta^*(\xi), e_A \otimes a \rangle \overset{def}{=}$$

$$= \langle \xi, m(e_A, a) \rangle = \underline{\langle \xi, a \rangle}$$

S^*: $\langle S^*(\xi), a\rangle \stackrel{def}{=} \langle \xi, S(a)\rangle$

Для доказательства антигомоморфности S^* требуется тождество

$$(S\otimes S)\circ\Delta = P\circ\Delta\circ S$$

или для $\forall a$:

$$\Delta(S(a)) = S(a_{(2)})\otimes S(a_{(1)}).$$

$$\langle S^*(\xi * \eta), a\rangle = \langle \xi * \eta, S(a)\rangle \stackrel{def}{=}$$

$$= \langle \xi\otimes\eta, \Delta(S(a))\rangle = \langle \xi\otimes\eta, S(a_{(2)})\otimes S(a_{(1)})\rangle =$$

$$= \langle \xi, S(a_{(2)})\rangle\langle \eta, S(a_{(1)})\rangle \stackrel{def}{=}$$

$$= \langle S^*(\eta)\otimes S^*(\xi), \underbrace{a_{(1)}\otimes a_{(2)}}_{\Delta(a)}\rangle \stackrel{def}{=}$$

$$= \langle S^*(\eta) * S(\xi), a\rangle$$

$\Rightarrow$ в силу $\forall a$:

$$S^*(\xi * \eta) = S^*(\eta) * S^*(\xi).$$

Пример

Рассмотрим $Mat_n(\mathbb{C})$ как конечномерную ассоциативную алгебру A, $\dim A = n^2$ с базисом E^i_j (матричные единицы).

Закон умножения в A:

$$E^i_j \cdot E^k_s = \delta^k_j E^i_s$$

Единичный элемент $e_A = \mathbb{1}_{N\times N} = \sum_{i=1}^N E^i_i$.

Дуальное пространство. A^* – множество линейных функций на $Mat_N(\mathbb{C})$ с базисом t^i_j и невырожденной формой

$$\langle t^i_j, E^k_s \rangle = \delta^{ik}\delta_{js}$$

$\boxed{У}$ Матричное умножение и единица в $Mat_N(\mathbb{C})$ индуцируют на $Mat^*_N(\mathbb{C})$ ко-умножение $\Delta^*(t^i_j) = t^i_k \otimes t^k_j$ и ко-единицу $\varepsilon^*(t^i_j) = \delta^i_j$.

Проверяем:

$$\langle \Delta^*(t^i_j), E^k_s \otimes E^r_p \rangle \overset{def}{=} \langle t^i_j, E^k_s \cdot E^r_p \rangle =$$

$$= \delta^r_s \langle t^i_j, E^k_p \rangle = \underline{\delta^r_s \delta^{ik} \delta_{jp}}.$$

$$\langle t^i_m \otimes t^m_j, E^k_s \otimes E^r_p \rangle = \sum_m \delta^{ik}\delta_{ms}\delta^{mr}\delta_{pj} =$$

Σ по m $$= \underline{\delta^r_s \delta^{ik}\delta_{pj}} \to \Delta^*(t^i_j) = t^i_m \otimes t^m_j$$

$$\varepsilon^*(t^i_j) = \langle t^i_j, \mathbb{1} \rangle = \langle t^i_j \sum_k E^k_k \rangle = \sum_k \delta^{ik}\delta_{jk} = \delta^i_j$$

[3] В алгебре регулярных функций =36=
на $Mat_N(\mathbb{C})$ мы имеем коумножение
$\Delta(t^i_j) = t^i_k \otimes t^k_j$, ко-единицу $\varepsilon(t^i_j) = \delta^i_j$
и структуру коммутативной алгебры
относительно поточечного умножения.
Следует понимать, что би-алгебра
регулярных функций (как ∞-мерный
объект) не является дуальной к
алгебре $Mat_N(\mathbb{C})$.