Модули и комодули над алгебрами Хопфа. Квантовая алгебра функций на матричной алгебре и матричной группе.

В теории ассоциативных алгебр и алгебр Ли важную роль играют представления этих алгебр линейными операторами в векторных пространствах. Напомним определение:

$\boxed{O}$ Левым линейным представлением алгебры $\mathcal{A}$ в векторном пространстве V называется гомоморфизм $\hat{T}: \mathcal{A}$ в алгебру $\mathrm{End}(V)$ (линейных операторов на V) со свойствами:

(i) $\forall a, b \in \mathcal{A}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

$$\alpha a + \beta b \xrightarrow{T} \alpha \hat{T}(a) + \beta \hat{T}(b) \text{ (линейность)}$$

(ii) $\forall a, b \in \mathcal{A}$

$$\underbrace{a \cdot b}_{\text{произведение в } \mathcal{A}} \xrightarrow{T} (\hat{T}(a)\triangleright) \cdot (\hat{T}(b)\triangleright) = \hat{T}(a \cdot b)\triangleright$$

— умножение элементов переходит в произведение операторов.

Символ $\triangleright$ показывает "направление" действия оператора $\hat{T}$:

$$\forall v \in V: \quad \hat{T}(a \cdot b) \triangleright v = \hat{T}(a) \triangleright (\hat{T}(b) \triangleright v).$$

То есть, в произведении "левых" операторов $\hat{T}(a) \cdot \hat{T}(b)$ <u>первым</u> действует $\hat{T}(b)$, а затем $\hat{T}(a)$.

Пространство V с таким гомоморфизмом T называется, также, <u>левым модулем</u> над алгеброй $\mathcal{A}$ или левым $\mathcal{A}$-модулем.

$\boxed{\text{Зам.}}$ Можно рассматривать и <u>правые</u> $\mathcal{A}$-модули. Их определение отличается только порядком действия операторов, в произведение которых отображается $a \cdot b$:

$$a \cdot b \longmapsto \triangleleft \hat{T}(a \cdot b) = (\triangleleft \hat{T}(a)) \cdot (\triangleleft \hat{T}(b)),$$

т. е. для $\forall v \in V$:

$$v \triangleleft \hat{T}(a \cdot b) = (v \triangleleft \hat{T}(a)) \triangleleft \hat{T}(b).$$

Здесь <u>первым</u> действует $\hat{T}(a)$, а затем $\hat{T}(b)$.

$\boxed{\text{Зам.}}$ Если дан <u>левый</u> A-модуль V, то дуальное пространство V^* легко превращается в <u>правый</u> A-модуль следующим определением: $\forall a \in A \Rightarrow \triangleleft \hat{T}^*(a) \in End(V^*)$:

$$\langle \xi \triangleleft \hat{T}^*(a), v \rangle \overset{def}{=\!=} \langle \xi, \hat{T}(a) \triangleright v \rangle$$

$\forall \xi \in V^*$ и $\forall v \in V$. Здесь $\langle , \rangle : V^* \otimes V \to \mathbb{C}$ — невырожденное спаривание V и V^*. Из приведённой формулы легко увидеть, что во взаимно-дуальных базисах $\{e_i\} \subset V$ и $\{\epsilon^i\} \in V^*$: $\langle \epsilon^i, e_j \rangle = \delta^i_j$ матрицы операторов $\triangleleft \hat{T}^*(a)$ и $\hat{T}(a) \triangleright$ просто совпадают:

$$\epsilon^i \triangleleft \hat{T}^*(a) = \sum_j \underline{\underline{\mathbb{T}^i_j}}\, \epsilon^j$$

$$\hat{T}(a) \triangleright e_i = \sum_k e_k \underline{\underline{\mathbb{T}^k_i}}.$$

Так что эта связь левых и правых модулей не даёт новых представлений.

А вот по заданному <u>левому</u>

A-модуля V построить структуру <u>левого</u> A-модуля в V^* уже не просто, и это будет новое представление. На прошлой лекции мы разбирали как в решении этой задачи помогает антипод в A (если он есть).

Перепишем определение левого A-модуля V в виде коммутативной диаграммы. Будем трактовать гомоморфизм $T: a \mapsto \hat{T}(a)$ как билинейное отображение $A \otimes V \xrightarrow{T} V$, обеспечивающее коммутативность следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
 & A \otimes A \otimes V \arrow[dl, "id_A \otimes T"'] \arrow[r, "m_A \otimes id_V"] & A \otimes V \arrow[d, "T"] \\
A \otimes V \arrow[rr, "T"'] & & V
\end{tikzcd}$$

Здесь $m_A: A \otimes A \to A$ — ассоциативное <u>умножение</u> в A.

С помощью обращения стрелок и замены m_A на Δ мы приходим к понятию ко-модуля (ко-представления) ко-алгебры A.

$\boxed{O}$ Пусть A – коалгебра с гомоморфизмами коумножения $\Delta : A \to A \otimes A$ и коединицы $\varepsilon : A \to \mathbb{C}$, и V – линейное пространство. Пространство V называется <u>правым</u> ко-модулем над A если $\exists$ <u>линейное</u> отображение $\delta : V \to V \otimes A$ со свойствами: Коммутативны следующие диаграммы:

(i)
$$\begin{tikzcd}
 & V\otimes A\otimes A & \\
V\otimes A \arrow[ur, bend left, "\delta\otimes id_A"] & V \arrow[l, "\delta"'] \arrow[r, "\delta"] & V\otimes A \arrow[ul, bend right, "id_V\otimes\Delta"']
\end{tikzcd}$$

(ii)
$$\begin{tikzcd}
V\otimes \mathbb{C} \arrow[d, equal, "\cong"] & & V\otimes A \arrow[ll, bend right, "id_V\otimes\varepsilon"'] \\
V \arrow[rr, "\delta"'] & & V\otimes A
\end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{Зам.}}$ Диаграмма (ii) есть обращение соответствующей диаграммы для $\mathcal{A}$-модуля, которая отражает тривиальность <u>действия</u> единичного элемента $e_{\mathcal{A}}$: $e_{\mathcal{A}} \overset{T}{\longmapsto} \hat{T}(e_{\mathcal{A}})\triangleright \equiv id_V$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}\otimes V \arrow[rr, bend left, "\eta\otimes id_V"] \arrow[d, equal, "\equiv"'] & & \mathcal{A}\otimes V \arrow[dll, bend left, "T"] \\
V & &
\end{tikzcd}$$

Здесь $\eta : \mathbb{C}\to\mathcal{A}$ - гомоморфизм вложения поле в алгебру, отвечающий наличию единичного элемента $e_{\mathcal{A}} = \eta(1)$.

$$z\otimes v \overset{\eta\otimes id_V}{\longmapsto} z\cdot e_{\mathcal{A}}\otimes v \overset{T}{\longmapsto} \hat{T}(z e_{\mathcal{A}})\triangleright v =$$
$$= z\hat{T}(e_{\mathcal{A}})\triangleright v = zv \Leftrightarrow \hat{T}(e_{\mathcal{A}})\triangleright = id_V$$

Как мы видели в прошлой лекции, для $\forall$ алгебры $\mathcal{A}$ дуальное пространство $\mathcal{A}^*$ становится <u>ко-алгеброй</u> с коумножением Δ^* и коединицей ε^*, связанными с умножением m и единицей η в A через невырожденное спаривание $\langle\ ,\ \rangle : A\otimes A^* \to \mathbb{C}$. В этом случае, любой правый комодуль над A^* становится левым модулем над A. Пусть V - векторное пространство и $\delta : V \to V\otimes A^*$ (это отображение ещё называют кодействием A^* на V). Представление $\hat{T}$:

$$a\in A \longmapsto \hat{T}(a)\triangleright$$ задаётся так:

$$a\otimes v \xmapsto{id_A\otimes\delta} a\otimes\left(v_{(1)}\otimes\xi_{(2)}\right) \longrightarrow v_{(1)}\langle a,\xi_{(2)}\rangle \overset{def}{=} \hat{T}(a)\triangleright v.$$

Здесь $\delta(v) = v_{(1)}\otimes\xi_{(2)}$ - Свидлеровские обозначения для кодействия.

Рассмотрим важный для дальнейшего простой пример.

Матричная алгебра $Mat_n(\mathbb{C})$.

Рассмотрим конечномерную ассоциативную алгебру $Mat_n(\mathbb{C}) = \mathcal{A}$ комплексных квадратных матриц $n \times n$.

Удобный базис в ней образуют "матричные единицы" $E^a{}_b$ $(1 \leq a, b \leq n)$ (единица на пересечении a-й строки и b-го столбца, в других местах — нули).

$\forall$ $n \times n$ матрица $A = \|A^i{}_j\|^n_1$ раскладывается по этому базису так

$$A = \sum_{a,b=1}^{n} A^a{}_b E^a{}_b$$

Умножение $E^i{}_j E^k{}_s = \delta^k_j E^i{}_s$

$$\mathbb{1} = \sum_{i=1}^{n} E^i{}_i$$

Дуальное пространство — ~~мно~~ линейное пространство линейных функций на $Mat_n(\mathbb{C})$. Спаривание:

$$\langle A, f \rangle = f(A) \quad \forall f \in Mat_n^* \equiv \mathcal{A}^*$$
$$A \in Mat_n.$$

Дуальный к $E^a{}_b$ базис относительно такого спаривания:

$\{t^i{}_j\} \in Mat^*_n$: $\langle E^a{}_b, t^i{}_j \rangle = \delta^{ai}\delta_{bj}$,

то есть $t^i{}_j(A) = A^i{}_j$.

$\boxed{\text{У}}$ ~~Пр~~ Пространство $A^* = Mat^*_n(\mathbb{C})$ есть ко-алгебра, коумножение и ко-единица в которой индуцированы алгебраической структурой A:

$$\Delta(t^i{}_j) = \sum_{k=1}^{n} t^i{}_k \otimes t^k{}_j$$

$$\varepsilon(t^i{}_j) \overset{def}{=} t^i{}_j(\mathbb{1}_{n\times n}) = \delta^i_j$$

Рассмотрим n-мерное векторное пространство V и зафиксируем в нём какой-нибудь базис из векторов $\{e_i\}_{1\le i\le n} \subset V$.

$\boxed{\text{У}}$ Линейное отображение δ : $V \to V \otimes Mat^*_n$ заданное на базисных элементах соотношением:

$$e_i \xmapsto{\ \delta\ } \sum_k e_k \otimes t^k{}_i$$

является ко-действием $A^* = Mat_n^*$ на V (то есть V — правый комодуль над A^*).

$\boxed{\text{Зам.}}$ $\forall\, v = \sum_i v^i e_i \xmapsto{\ \delta\ } \sum_{k,i} e_k \otimes t^k_i v^i$

<u>Доказательство.</u>

Проверим коммутативность диаграмм (i) и (ii) из определения комодуля. Для краткости не будем писать знак Σ при наличии <u>повторяющихся</u> индексов:

$$v^i e_i \equiv \sum_{i=1}^n v^i e_i .$$

(i)

$$\forall v \in V = v^j e_j \xmapsto{\ \delta\ } e_i \otimes t^i_j v^j \xrightarrow{\ id_V \otimes \Delta^*\ } \underline{e_i \otimes t^i_k \otimes t^k_j v^j}$$

$$v^j e_j \xmapsto{\ \delta\ } e_k \otimes t^k_j v^j \xrightarrow{\ \delta \otimes id_{A^*}\ } \underline{e_i \otimes t^i_k \otimes t^k_j v^j}$$

Подчеркнутые выражения совпадают, коммутативность диаграммы (i) имеется. (см. стр. =5=)

(ii)
$$\begin{tikzcd} v = v^j e_j \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, equal] & e_i \otimes t^i_j v^j \arrow[d, "id_V \otimes \varepsilon^*"] \\ v^j e_j \otimes 1 \arrow[r, equal] & e_i \otimes \delta^i_j v^j \end{tikzcd}$$

Итак, V есть правый комодуль над $\mathcal{A}^* = Mat_n^*(\mathbb{C})$. Спаривание $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ дает стандартное действие (представление) $\mathcal{A} = Mat_n(\mathbb{C})$ в пространстве V:

$$\forall A \in Mat_n(\mathbb{C}) \to \hat{T}(A) \triangleright e_i \overset{def}{=} e_k \otimes \langle A, t^k_i \rangle =$$
$$= e_k \otimes t^k_i(A) = e_k A^k_i$$

То есть, $\forall$ матрице A сопоставляется линейный оператор $\hat{T}(A)$, матрица которого в <u>базисе</u> $\{e_i\}$ есть A.

Расширим теперь $Mat_n^*(\mathbb{C})$ (пространство <u>линейных</u> функций на $Mat_n(\mathbb{C})$) до коммутативной алгебры регулярных функций на $Mat_n(\mathbb{C})$. Элементами этой алгебры (будем ее обозначать $Fun(Mat_n(\mathbb{C}))$) являются всевозможные полиномы от n^2 генераторов t^i_j. Произведение генераторов — поточечное, то есть $t^i_j \cdot t^k_p$, например, это следующая функция на $Mat_n(\mathbb{C})$:

$$\forall A \in Mat_n(\mathbb{C}) \quad (t^i_j \cdot t^k_p)(A) = t^i_j(A)\, t^k_p(A) = A^i_j A^k_p.$$

Естественно, это уже <u>не</u> линейная функция, т.е. $t^i_j \cdot t^k_p \notin Mat_n^*(\mathbb{C})$.

Коумножение $\Delta(t^i_j) = t^i_k \otimes t^k_j$ и коединица $\varepsilon(t^i_j) = \delta^i_j$ распространяются на всю алгебру $Fun(Mat_n(\mathbb{C}))$ требованием гомоморфности:

$$\Delta(t^{i_1}_{j_1} \cdot \ldots \cdot t^{i_k}_{j_k}) \overset{def}{=} \Delta(t^{i_1}_{j_1}) \ldots \Delta(t^{i_k}_{j_k})$$

$$\varepsilon(t^{i_1}_{j_1} \ldots t^{i_k}_{j_k}) = \varepsilon(t^{i_1}_{j_1}) \ldots \varepsilon(t^{i_k}_{j_k}).$$

$$\Delta(f_1 + f_2) = \Delta(f_1) + \Delta(f_2)$$

$$\varepsilon(f_1 + f_2) = \varepsilon(f_1) + \varepsilon(f_2) \qquad \forall f_1, f_2 \in Fun(Mat_n(\mathbb{C})).$$

Легко проверить, что эти определения превращают коммутативную алгебру $Fun(Mat_n(\mathbb{C}))$ в <u>биалгебру</u>.

Если V – n-мерное векторное пространство с фиксированным базисом $\{e_i\}_{1\le i\le n}$, то любая тензорная степень $V^{\otimes k}$ превращается в правый комодуль над $\mathrm{Fun}(\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}))$ по следующему правилу.

$$\underbrace{e_{i_1}\otimes e_{i_2}\otimes\ldots\otimes e_{i_k}}_{\text{базисный вектор в } V^{\otimes k}} \xmapsto{\delta} e_{a_1}\otimes\ldots\otimes e_{a_k}\otimes t^{a_1}_{i_1}\cdots t^{a_k}_{i_k}$$

$$\delta: V^{\otimes k}\to V^{\otimes k}\otimes \mathrm{Fun}(\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}))$$

Убедитесь самостоятельно в корректности данного определения δ.

Бесконечномерное пространство

$$\mathbb{T}(V)=\bigoplus_{k\ge 0} V^{\otimes k}$$

(считаем по определению при $k=0$: $V^{\otimes 0}=\mathbb{C}$) называется тензорной алгеброй, порождённой пространством V. Её элементами являются произвольные <u>конечные</u> линейные комбинации векторов из всевозможных $V^{\otimes k}$.

Умножение элементов заключается просто в приписывании "слов" из тензорных произведений друг к другу. Например:

$$a = v^{ij} e_i \otimes e_j \in V^{\otimes 2}$$

$$b = w^{krs} e_k \otimes e_r \otimes e_s \in V^{\otimes 3} \Rightarrow$$ (v^{ij} и w^{krs} — числовые коэффициенты)

$$\Rightarrow a \cdot b = v^{ij} w^{krs} e_i \otimes e_j \otimes e_k \otimes e_r \otimes e_s \in V^{\otimes 5}$$

Рассмотрим фактор-алгебру $\mathbb{T}(V)$ по двухстороннему идеалу, порождённому $\frac{n(n-1)}{2}$ векторами из $V^{\otimes 2}$: $e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i$, $i<j$

$$\frac{\mathbb{T}(V)}{\langle e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i \rangle} = Sym(V)$$

Это так называемая симметрическая алгебра пространства V, которая изоморфна алгебре полиномов от n переменных

$$Sym(V) \cong \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$$

Поскольку базис в однородных компонентах алгебры $Sym(V)$ можно выбрать в виде

$$e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \ldots \otimes e_{i_k} \in (Sym(V))^{(k)}$$

$$1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_k \leq n$$

$$Sym(V) = \bigoplus_{k \geq 0} (Sym(V))^{(k)}$$

то изоморфизм строится заданием отображения базисных элементов:

$$e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_k} \in Sym(V) \longleftrightarrow x_{i_1} \ldots x_{i_k} \in \mathbb{C}[x_1 \ldots x_n]$$

$$1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_k \leq n.$$

Важным следствием коммутативности алгебры регулярных функций $Fun(Mat_n(\mathbb{C}))$ является то, что ~~пространство~~ алгебра $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ остаётся правым комодулем над алгеброй функций:

$$\tilde{\delta}: x_{i_1} \ldots x_{i_k} \longmapsto x_{a_1} \ldots x_{a_k} \otimes t^{a_1}_{i_1} \ldots t^{a_k}_{i_k}.$$

Для этого убедимся, что идеал $\langle e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i \rangle$ инвариантен относительно кодействия δ. В силу определения фактор-алгебры, вектора $e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i$ равны нулю в $Sym(V)$. Кодействие δ не должно разрушать

Это свойство:

$$e_i\otimes e_j - e_j\otimes e_i \xmapsto{\delta} e_a\otimes e_b\otimes t^a_i t^b_j -$$

$$- e_b\otimes e_a\otimes t^b_j t^a_i \equiv (e_a\otimes e_b - \underline{e_b\otimes e_a})\otimes t^a_i t^b_j +$$

$$+ e_b\otimes e_a\left(\underline{t^a_i t^b_j} - t^b_j t^a_i\right)$$

Мы добавили и вычли слагаемые.

Таким образом, первое слагаемое обращается в 0 при взятии фактора по идеалу, а второе слагаемое равно 0 в силу коммутативности $\mathrm{Fun}(\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}))$

$$t^a_i t^b_j = t^b_j t^a_i.$$

Запишем условие коммутативности в матричных обозначениях:

$$X_i X_j = X_j X_i \iff \boxed{X_1 X_2 = \cancel{P_{12}}\, X_1 X_2 P_{12}}$$

$$(P_{12})^{ab}_{ij} = \delta^a_j \delta^b_i -$$

матрица перестановки.

Или, перенося всё в левую часть:

$$X_1 X_2 (\mathbb{1} - P_{12}) = 0$$

Для t^i_j вводим $T = \|t^i_j\|$, тогда

$$t^{i_1}_{j_1} t^{i_2}_{j_2} = t^{i_2}_{j_2} t^{i_1}_{j_1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow T_1 T_2 = T_2 T_1 \equiv \mathbb{P}_{12} T_1 T_2 \mathbb{P}_{12}, \Rightarrow$$

где учтено, что $\mathbb{P}^2_{12} = \mathbb{1}_{12}$.

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}_{12} T_1 \cdot T_2 = T_1 \cdot T_2 \mathbb{P}_{12}}$$ – условие коммутативности матричных элементов матрицы T.

Построим теперь из генераторов $\{x_i\}$ алгебры полиномов некоммутативную алгебру. Для этого ~~в фактор~~ рассмотрим фактор-алгебру $\mathbb{T}(V)$ по двухстороннему идеалу, порожденному векторами:

$$e_a \otimes e_b R^{ab}_{ij} - q e_i \otimes e_j,$$

где $R = \|R^{ab}_{ij}\|$ – $n^2 \times n^2$ R-матрица Дринфельда-Джимбо:

$$R = q \sum_{i=1}^{n} E^i_i \otimes E^i_i + \sum_{i \neq j} E^i_j \otimes E^j_i + \lambda \sum_{i<j} E^i_i \otimes E^j_j$$

$$\lambda = q - \frac{1}{q}$$

Напомним, что R удовлетворяет уравнению Янга–Бакстера:

$$R_{12} R_{23} R_{12} = R_{23} R_{12} R_{23},$$

условию Гекке:

$$R^2 = \mathbb{1} + \lambda R \Leftrightarrow (R - q\mathbb{1}) \cdot (R + \frac{1}{q}\mathbb{1}) = 0$$

и является деформацией перестановки:

$$\lim_{q \to 1} R = \sum_{i,j=1}^{n} E^i_j \otimes E^j_i = \mathbb{P}.$$

Фактор-алгебра

$$\frac{T(V)}{\langle e_a \otimes e_b R^{ab}_{ij} - q e_i \otimes e_j \rangle}$$

изоморфна алгебре полиномов от некоммутативных переменных $\{x_i\}$, для которых выполнены соотношения

$$x_1 x_2 R_{12} = q x_1 x_2$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{x_1 x_2 (R_{12} - q\mathbb{1}_{12}) = 0}$$

Зам. Это плоская деформация соотношений коммутативности

$$x_1 x_2 (\mathbb{P}_{12} - \mathbb{1}_{12}) = 0.$$

При этом очень важно, что q - это собственное значение матрицы R, что приводит к вырожденности матрицы $R_{12} - q\mathbb{1}_{12}$.

Если наложить соотношение

$$x_1 x_2 (R_{12} - \mathbb{1}_{12}) = 0 \quad \text{(например)}$$

то это тоже будет деформация коммутативной алгебры, но, в силу невырожденности $(R_{12} - \mathbb{1}_{12})$ в такой деформации мы получаем

$$x_1 x_2 = 0 \Leftrightarrow x_i x_j = 0 \quad \forall i, j.$$

То есть, в некоммутативной алгебре у нас останутся только линейные полиномы от $\{x_i\}$ $\Rightarrow$ наше "квантование" убивает почти всю ∞ мерную исходную коммутативную алгебру $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ и является сильно неплоским. Это не интересная деформация.

Есть ещё одно нетривиальное квантование:

$$x_1 x_2 \left(R_{12} + \frac{1}{q}\mathbb{1}_{12}\right) = 0.$$

Это деформация внешней алгебры $x_i x_j = -x_j x_i$.

Итак, пусть есть некоммутативная алгебра $x_1 x_2 R_{12} = q x_1 x_2$.

Чтобы эта алгебра по-прежнему оставалась <u>комодулем</u> над алгеброй с образующими t^i_j, они <u>не могут</u> оставаться коммутативными.

Найдём новое умножение генераторов t^i_j из условия, что их кодействие на алгебре некоммутативных полиномов не разрушает эту алгебру:

$$x_1 x_2 R_{12} - q x_1 x_2 = 0 \Leftrightarrow x_a x_b R^{ab}_{ij} - q x_i x_j = 0$$

Выпишем результат кодействия на перестановочные соотношения x_i:

$$\left\{\begin{array}{l} x_a x_b R^{ab}_{ij} \xmapsto{\delta} x_r x_s \otimes t^r_a t^s_b R^{ab}_{ij} \\ \quad \parallel \hspace{6cm} \parallel \\ q x_i x_j \xmapsto{\delta} \underline{q x_a x_b} \otimes t^a_i t^b_j = \underline{x_r x_s R^{rs}_{ab}} \otimes t^a_i t^b_j \end{array}\right.$$

Сравнивая 2 последних выражения в каждой цепочке, получаем: $R^{rs}{}_{ab}\, t^a{}_i\, t^b{}_j = t^r{}_a\, t^s{}_b\, R^{ab}{}_{ij}$

или $\boxed{R_{12} T_1 T_2 = T_1 T_2 R_{12}}$ (★)

Это плоская деформация коммутативной алгебры $Fun(Mat_n(\mathbb{C}))$ называется алгебрай квантованных функций на матричной алгебре $Mat_n(\mathbb{C})$. Будем обозначать её $Fun_q(Mat_n(\mathbb{C}))$ или, для краткости, $\mathcal{T}_n(R)$. Элементами $\mathcal{T}_n(R)$ являются конечные линейные комбинации мономов из генераторов $t^i{}_j$ с квадратичными перестановочными соотношениями (★).

$\boxed{\text{У}}$ Алгебра $\mathcal{T}_n(R)$ является биалгеброй с коумножением $\Delta(T_1) = T_1 \otimes T_1$ и коединицей $\varepsilon(T) = \mathbb{1}$

Докажите это утверждение самостоятельно.