НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ

КУРСЫ И СЕМИНАРЫ ПО ВЫБОРУ ПРЕДЛАГАЕМЫЕ В 2019/20 УЧЕБНОМ ГОДУ СТУДЕНТАМ ФАКУЛЬТЕТА МАТЕМАТИКИ

МОСКВА
2019

Содержание

Course descriptions in English **84**

(*primary* and advanced level curses are in *italic* and regular shape respectively)

Курсы на выбор студентов

Все курсы формально делятся на «учебные дисциплины» и «научно-исследовательские семинары». Это деление вызвано имеющимися в НИУ ВШЭ ограничениями на допустимое число участников курса с одной стороны и число учебных дисциплин[1] с другой. Уточнять ограничения на количества дисциплин и семинаров, которые могут быть в Вашем учебном плане, следует в учебной части. Обратите внимание, что формальный статус «дисциплины» или «семинара» может не иметь никакого отношения к стилю проведения занятий. О реальном соотношении лекций, упражнений и/или докладов участников и вкладе этих видов деятельности в итоговую отметку читайте на странице с описанием курса.

Курсы, имеющие формальный статус «научно-исследовательского семинара», помечены в таблицах аббревиатурой «НИС», напечатанной после фамилии преподавателя. Если такой аббревиатуры нет, курс по умолчанию является «учебной дисциплиной». Пометка типа «2+» означает, что курс рассчитан на студентов второго года обучения и старше. Английское название курса означает, что он читается на английском языке. У некоторых таких курсов кроме английского описания имеется ещё и русское, к которому ведёт отдельная гиперссылка. **Толстым шрифтом** набраны «толстые» курсы с нагрузкой две пары в неделю и оцениваемые в 6 кредитов за семестр[2]. Остальные, «тонкие» курсы идут одну пару в неделю и оцениваются в 3 кредита.

Курсы начального уровня

Пререквизиты к этим курсам не выходят за рамки первых двух лет бакалавриата. Они рекомендуются студентам младших курсов[3] как введения в те разделы математики, где планируется дальнейшая специализация, а также старшекурсникам, желающим расширить математический кругозор в областях, выходящих за рамки выбранной специализации. В «Содержании» на стр. 2–4 ссылки на описания курсов начального уровня набраны *курсивом*.

ЗАНЯТИЯ, ДОСТУПНЫЕ ПЕРВОКУРСНИКАМ

ОСЕНЬ

- Геометрия и группы, О. В. Шварцман, НИС, 1+.
- Геометрия и динамика, А. В. Клименко, Г. И. Ольшанский, А. С. Скрипченко, НИС, 1+.
- Проективная алгебраическая геометрия, И. В. Артамкин,А. С. Тихомиров, НИС, 1+.
- Основные понятия математики, Ю. М. Бурман, С. М. Львовский, НИС, 1+.
- Графы на поверхностях, Н. Я. Амбург, НИС, 1+.
- **Теория кодирования как введение в алгебру и арифметику, В. А. Гриценко, 1+.**
- **Алгоритмы и автоматы, Ю. В. Саватеев, 1+.**

ВЕСНА

- Геометрия и группы, О. В. Шварцман, НИС, 1+.
- Геометрия и динамика, А. В. Клименко, Г. И. Ольшанский, А. С. Скрипченко, НИС, 1+.
- Проективная алгебраическая геометрия, И. В. Артамкин,А. С. Тихомиров, НИС, 1+.
- Математика физических явлений, П. И. Арсеев, НИС, 1+.
- **Введение в теорию чисел, В. З. Шарич, 1+.**
- Избранные главы дискретной математики, И. В. Артамкин, НИС, 1+.
- **Элементы фрактальной геометрии[4], В. В. Шихеева, НИС, 1+, модуль 3, 3 кредита.**
- **Введение в квантовую теорию, В. В. Лосяков, П. Г. Гавриленко, 1+.**

[1] В неделю, в семестр, в РУПе, в ИУПе и в множестве других бумаг и контролируемых администрацией университета показателей.

[2] Если «толстый» курс длится меньше семестра (например, один модуль), то он даёт 3 кредита.

[3] В частности, большинство этих курсов подойдут второкурсникам в качестве «антимайноров».

[4] Курс читается только в третьем модуле (январь–март), нагрузка: 2 пары в неделю, стоимость: 3 кредита.

ЗАНЯТИЯ, ДОСТУПНЫЕ ВТОРОКУРСНИКАМ, И «АНТИМАЙНОРЫ»

ОСЕНЬ

- **Введение в алгебраическую топологию, М. Э. Казарян, 2+.**
- **Introduction to Commutative Algebra, A. S. Khoroshkin, 2+, описание на русском.**
- **Введение в теорию категорий и гомологическую алгебру, А. Л. Городенцев, 2+.**
- **Symmetric Functions, E. Yu. Smirnov, 2+.**
- **Introduction to Functional Analysis, A. Yu. Pirkovskii, 2+.**
- Markov Chains, A. Dymov, 2+.
- Introduction to Ergodic Theory, M. L. Blank, НИС, 2+, описание на русском.
- Категории и универсальная алгебра, В. Б. Шехтман, НИС, 2+.
- **Линейное программирование, А. В. Колесников, НИС, 2+.**

ВЕСНА

- **Differential Geometry, P. E. Pushkar, 2+.**
- **Algebraic Geometry: A First Geometric Look, V. S. Zhgoon, 2+, описание на русском.**
- **Дополнительные главы алгебры, Л. Г. Рыбников, 2+.**
- **Introduction to Galois Theory, C. Brav, 2+.**
- Дифференциальная теория Галуа, С. О. Горчинский, НИС, 2+.
- **Introduction to Riemann Surfaces, S. M. Lvovski, 2+, описание на русском.**
- **Тэта функции и модулярные функции, О. В. Шварцман, НИС, 2+.**
- Calculus of Variations, M. Mariani, НИС, 2+.
- Electrical Varieties, V. G. Gorbounov, НИС, 2+.
- **Introduction to Frobenius algebras and mirror symmetry, P. I. Dunin–Barkowski, A. A. Basalaev, НИС, 2+, описание на русском.**

Специальные курсы и семинары

Эти занятия предназначены для более глубокого изучения тех разделов, по которым планируется дальнейшая специализация. В «Содержании» на стр. 2–4 ссылки на все специальные курсы набраны прямым шрифтом.

ГОДОВЫЕ СТУДЕНЧЕСКИЕ НАУЧНЫЕ СЕМИНАРЫ

ОСЕНЬ

- Геометрические структуры на многообразиях, Д. Б. Каледин, М. С. Вербицкий, В. С. Жгун, НИС, 3+.
- Functional Analysis and Noncommutative Geometry, A. Yu. Pirkovskii, НИС, 3+.
- Combinatorics of Vassiliev Invariants, M. E. Kazarian, S. K. Lando, НИС, 3+.
- Динамические системы, Ю. С. Ильяшенко, НИС, 3+.
- Representations and Probability, A. I. Bufetov, A. Dymov, A. V. Klimenko, M. Mariani, G. I. Olshanski, НИС, 3+.
- Теория представлений, Б. Л. Фейгин, Л. Г. Рыбников, НИС, 3+.
- Современные проблемы математической логики, Л. Д. Беклемишев, Д. С. Шамканов, В. Б. Шехтман, НИС, 2+.
- Геометрия и анализ дифференциальных уравнений, В. А. Побережный, И. В. Вьюгин, НИС, 3+.

ВЕСНА

- Геометрические структуры на многообразиях, Д. Б. Каледин, М. С. Вербицкий, В. С. Жгун, НИС, 3+.
- Functional Analysis and Noncommutative Geometry, A. Yu. Pirkovskii, НИС, 3+.
- Combinatorics of Vassiliev Invariants, M. E. Kazarian, S. K. Lando, НИС, 3+.
- Динамические системы, Ю. С. Ильяшенко, НИС, 3+.
- Representations and Probability, A. I. Bufetov, A. Dymov, A. V. Klimenko, M. Mariani, G. I. Olshanski, НИС, 3+.
- Теория представлений, Б. Л. Фейгин, Л. Г. Рыбников, НИС, 3+.
- Современные проблемы математической логики, Л. Д. Беклемишев, Д. С. Шамканов, В. Б. Шехтман, НИС, 2+.
- Геометрия и анализ дифференциальных уравнений, В. А. Побережный, И. В. Вьюгин, НИС, 3+.

СПЕЦКУРСЫ

ОСЕНЬ

- **Algebraic Geometry. Language of schemes, V. A. Vologodsky, 3+.**
- **Комплексная геометрия, А. В. Пенской, 3+.**
- Analytic Number Theory, A. B. Kalmynin, НИС, 3+.
- **Lie Groups and Lie Algebras, G. I. Olshanski, 3+.**
- An introduction to elliptic operators, A. G. Gorinov, НИС, 3+.
- **Smooth structures on manifolds, A. S. Tikhomirov, НИС, 3+.**
- Теория пучков, Н. С. Маркарян, НИС, 3+.
- **Hamiltonian Mechanics, I. M. Krichever, 3+.**
- Introduction to the theory of integrable equations, A. K. Pogrebkov, НИС, 3+.
- **Римановы поверхности и интегрируемые системы, С. М. Натанзон, НИС, 3+.**
- Introduction to Mathematical Statistics[3], A. S. Skripchenko, 3+, Module 2, 3 credits.
- Алгоритмы и модели вычислений, Д. А. Голубенко, НИС, 3+.
- **Классическая теория поля, П. И. Дунин–Барковский, 3+.**
- **Квантовая теория, В. В. Лосяков, А. Г. Семёнов, 3+.**
- Quantum integrable systems in formulas and pictures, Kh. S. Nirov, НИС, 3+.

ВЕСНА

- Algebraic Topology, M. V. Finkelberg, НИС, 3+.
- **Algebraic Geometry. Language of schemes, V. A. Vologodsky, 3+.**
- Convex and Algebraic Geometry, A. I. Esterov, V. A. Kiritchenko, E. Yu. Smirnov, НИС, 2+.
- Analytic Number Theory, A. B. Kalmynin, НИС, 3+.
- **Algebraic Number Theory, M. Z. Rovinsky, НИС, 3+.**
- **Введение в алгебраические группы и их инварианты, В. С. Жгун, 3+.**
- **Functional Analysis (Operator Theory), A. Yu. Pirkovskii, 3+.**
- Real algebraic and toric geometry, A. I. Esterov, НИС, 3+.
- **An introduction to stacks, C. Brav, A. G. Gorinov, НИС, 3+.**
- **Уравнения с частными производными, С. В. Шапошников, 3+.**
- **Constructive Methods of Functional Analysis, A. K. Pogrebkov, НИС, 3+.**
- Elliptic integrals and elliptic functions, T. Takebe, НИС, 3+, описание на русском.
- **Introduction to complex dynamics and analytic theory of ordinary differential equations[1], A. A. Glutsyuk, НИС, 3+, Module 3, 3 credits.**
- **Оптимизация формы[2], Е. О. Степанов, НИС, 3+, модуль 4, 3 кредита.**
- **Modern Dynamical Systems, A. S. Skripchenko, A. V. Zorich, НИС, 3+.**
- **Introduction to the theory of random processes, M. L. Blank, НИС, 3+, описание на русском.**
- **Математика для прагматика, А. В. Хохлов, 3+.**
- Математика процессов в ранней вселенной, К. П. Зыбин, НИС, 3+.
- **Квантовая теория поля, А. Г. Семёнов, НИС, 3+.**
- **Группа кос, R-матрицы и квантовые группы, П. А. Сапонов, П. Н. Пятов, НИС, 3+.**

[1]Курс читается с февраля по апрель (включительно), нагрузка: 2 пары в неделю, стоимость: 3 кредита.
[2]Курс читается только в четвёртом модуле (апрель–июнь), нагрузка: 2 пары в неделю, стоимость: 3 кредита.
[3]Курс читается только во втором модуле (ноябрь–декабрь), нагрузка: 1 пара в неделю, стоимость: 3 кредита.

Нематематические курсы, читаемые на факультете математики

Эти курсы читаются сотрудниками других факультетов и предназначены тем, кто хочет изучить те или иные области за пределами математики. Кроме курсов «Программирование» (оба семестра), «Эконометрика» и «Машинное обучение», которые не учитываются в ограничении на суммарное число нематематических курсов в ИУПе, все остальные курсы учитываются в этом ограничении наравне с курсами, читаемыми на других факультетах ВШЭ.

КУРСЫ, ЧИТАЕМЫЕ ПРЕДСТАВИТЕЛЯМИ ДРУГИХ ФАКУЛЬТЕТОВ

ОСЕНЬ

- **Введение в лингвистику, Б. Л. Иомдин, 1+.**
- **Философия, А. В. Михайловский, 1+.**
- **Избранные главы математической экономики, М. И. Левин, НИС, 3+.**

ВЕСНА

- **Машинное обучение, И. В. Щуров, 3+.**
- **Основы эконометрики, И. Б. Воскобойников, 3+.**
- **Методы сбора и анализа социологической информации, Д. С. Шмерлинг, 3+.**

Курсы для тех, кто увлёкся приложениями математики

Студентам, у которых курсовая или выпускная квалификационная работа посвящена приложениям математики, рекомендуется включить в свой ИУП следующие из перечисленных выше курсов:

КУРСЫ, ОРИЕНТИРОВАННЫЕ НА ПРИЛОЖЕНИЯ МАТЕМАТИКИ

ОСЕНЬ

- Алгоритмы и модели вычислений, Д. А. Голубенко, НИС, 3+.
- Introduction to Mathematical Statistics, A. S. Skripchenko, 3+, Module 2, 3 credits.
- **Линейное программирование, А. В. Колесников, 2+.**

ВЕСНА

- **Математика для прагматика, А. В. Хохлов, 3+.**
- **Машинное обучение, И. В. Щуров, 3+.**
- **Основы эконометрики, И. Б. Воскобойников, 3+.**

Статистическая информация о курсах

В НАСТОЯЩЕЙ МОМЕНТ В КНИГЕ КУРСОВ ИМЕЕТСЯ

	ОСЕНЬЮ	ВЕСНОЙ
всего	42	49
дисциплин	17	15
НИСов	25	34
толстых	19	27
тонких	23	22
на русском	25	26
на английском	17	23
из них с русским описанием	2	5
для первого курса	9	8
для второго курса	19	20
продвинутых	23	29
нематематических	3	3

Описания курсов на русском

Кроме курсов, читаемых по-русски, в этом разделе имеются русские описания некоторых курсов, читаемых по-английски. Это отмечается сразу под названием курса, следом за указанием его статуса («учебная дисциплина» или «НИС») и целевой аудитории.

Алгебраическая геометрия с геометрической точки зрения
учебная дисциплина на английском языке для студентов 2-го курса и старше
(see also the description in English)

ЛЕКТОР: В. С. Жгун.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2018/19 уч. г., две пары в неделю, 6 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: Алгебраическая геометрия изучает фигуры, локально устроенные как множество решений системы полиномиальных уравнений в аффинном пространстве. Особенностью этой науки является то, что она не только помогает описать нетривиальные геометрические конструкции и теоремы с алгебраической точки зрения, но также и взглянуть на «сухую» алгебру с геометрической точки зрения. Благодаря этому, с первого взгляда формальные алгебраические манипуляции приобретают чёткий геометрический смысл, а переход от геометрического к алгебраическому языку и наоборот, позволяет лучше понять различные математические конструкции и их свойства. Алгебраическая геометрия занимает центральное место в самых разных областях современной математики и математической физики, и является наиболее эффективным и красивым инструментом для установления нетривиальных связей между кажущимися далёкими друг от друга явлениями. Настоящий курс является *геометрическим* введением в предмет и знакомит слушателей с фундаментальными геометрическими фигурами и конструкциями, а также с алгебраическими структурами, которые за ними стоят.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: линейная и полилинейная алгебра и начальные представления о том, что такое многочлены, коммутативные кольца и их идеалы, тензорные произведения, аффинные и проективные пространства, топологические пространства и их открытые, замкнутые и компактные подмножества. Все необходимые технические моменты будут напоминаться.

ПРОГРАММА:

- Проективные пространства и проективные квадрики. Пространства квадрик. Прямые, коники, кривые Веронезе, рациональные кривые. Плоские кубические кривые. Сложение точек на эллиптической кривой.
- Многообразия Грассмана, Веронезе и Сегре. Проективные морфизмы, связанные с тензорной алгеброй. Клетки Шуберта.
- Целые элементы в расширениях колец, строение конечно порождённых алгебр над полем, базисы трансцендентности, теоремы Гильберта о нулях и базисе идеала.
- Интерпретация понятий коммутативной алгебры с точки зрения аффинной алгебраической геометрии. Спектры, топология Зарисского, геометрические свойства гомоморфизмов алгебр.
- Алгебраические многообразия. Отделимость. Свойства проективных многообразий, собственность. Рациональные функции и рациональные морфизмы.
- Различные определения размерности. Размерности подмногообразий и слоёв морфизмов. Вычисление размерностей проективных многообразий.

- Линейные пространства на квадриках. Прямые на кубических поверхностях. Многообразия Чжоу.
- Векторные расслоения и пучки их сечений. Векторные расслоения на проективной прямой. Линейные системы, обратимые пучки и дивизоры, группа Пикара. Морфизмы определяемые линейными системами.
- Касательные и нормальные пространства и конусы, гладкость, раздутие. Точная последовательность Эйлера на проективных пространствах и грассманианах.

УЧЕБНИКИ:

- А. Л. Городенцев, Алгебра – 2.
  http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-3/1415/algebra-2_2015.VI.15.pdf.
- A. L. Gorodentsev, Algebraic Geometry Start Up Course, «МЦНМО».
  http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/projgeom/1718/lec_total.pdf (realise 2017),
  http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/projgeom/tot-2006.ps.gz (realise 2006).
- Дж. Харрис, Алгебраическая геометрия. Начальный курс, «МЦНМО».
- И. Р. Шафаревич, Основы алгебраической геометрии I, II, «Наука».
- Д.Мамфорд, Красная книга о многообразиях и схемах. «МЦМНО», 2007.
- Ю.Манин, Введение в теорию схем и квантовые группы. «МЦМНО», 2014.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: $1/3\times$(решение задач из листков) $+ 2/3\times$(итоговый устный экзамен)

КОММЕНТАРИЙ: Устный экзамен состоит из двух вопросов и одной задачи, близкой по тематике к задачам из листков.

Алгоритмы и автоматы
учебная дисциплина для студентов 1-го курса и старше

ЛЕКТОР: Ю. В. Саватеев.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2018/19 уч. г., две пары в неделю, 6 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: Этот курс — введение в теорию вычислений. Мы обсудим различные модели вычислений, определим понятие алгоритма, узнаем, что с их помощью можно и нельзя сделать, и как оценивать их сложность.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: нет.

ПРОГРАММА: Конечные автоматы. Регулярные выражения. Контекстно-свободные грамматики. Машины Тьюринга. Вычислимые функции. Разрешимые и перечислимые множеста. Сводимость. Сложность вычислений. Сложностные классы P, NP, PSPACE, L, NL.

УЧЕБНИКИ: M. Sipser, Introduction to the Theory of Computation.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Итоговая оценка равна $(\text{КР}_1 + \text{КР}_2 + \text{КР}_3)\,/\,3$, округлённая до ближайшего целого числа (0.5 округляется в большую сторону). КР_1, КР_2 и КР_3 — результаты первой, второй и третьей контрольной работы.

Алгоритмы и модели вычислений
НИС для студентов 3-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛЬ: Д. А. Голубенко.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2018/19 уч. г., одна пара в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Теория алгоритмов возникла естественным образом из вычислительных задач в разных областях математики и по сей день остается живой областью, в которой некоторые тривиальные на первый взгляд вопросы до сих пор открыты — не доказано, например, существование полиномиального алгоритма разложения натурального числа на простые множители. Основные задачи теории алгоритмов — построение алгоритма, решающего некоторую задачу, доказательство его корректности и оценка его сложности по времени и ресурсоемкости. Мы разберём основные алгоритмы на числах, графах, в вычислительной алгебре и геометрии, исследуем некоторые их свойства и ознакомимся с их применениями.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: обязательные — дискретная математика, алгебра (1 курс), логика; желательные[1] — теория сложности (определения классов P, NP, PSPACE, сводимости), теория вероятности.

ПРОГРАММА:

1. Простейшие алгоритмы. Напоминание (алгоритм Евклида, алгоритм Гаусса). Умножение Карацубы, умножение Штрассена. Анализ сложности алгоритмов сортировки.
2. Числа. Проверка натурального числа на простоту (тест Ферма, тест Рабина – Миллера). Baby step, giant step. LLL-алгоритм. Протоколы Диффи – Хеллмана, RSA.
3. Графы. Алгоритмы обхода графа (в ширину, в глубину) и их применения. Нахождение максимального потока в сетях (теорема Форда – Фалкерсона). Структура данных UNION-FIND. Паросочетания.
4. Алгебра. Базисы Гребнера, алгоритм Бухбергера и его применения.
5. Быстрое преобразование Фурье и его применения (циркулянтные матрицы, алгоритм Шонхаге – Штрассена, поиск подслов).
6. Вероятностные алгоритмы. Лемма Шварца – Зиппеля. Приближенные решения линейных уравнений, поиск паросочетаний в графах, приближенные алгоритмы поиска максимального разреза.
7. Геометрия. Вычисление выпуклых оболочек. Линейное программирование.
8. Топология. Сложность вложения полиэдров в $\mathbb{R}^d$. Проверка узлов на тривиальность.

УЧЕБНИКИ:

1. D. Kozen «The design and analysis of algorithms», Springer, 1991
2. С. Дасгупта, К. Пападимитриу, У. Вазирани. «Алгоритмы», М. МЦНМО, 2012
3. Д. Кнут. «Искусство программирования», М. Мир, 1971
4. R. Motwani, P. Raghavan «Randomized Algorithms», CUP, 1995

[1]То, что знать желательно, но не обязательно, я напомню при необходимости, но не буду заострять на этом внимание.

5. И. В. Аржанцев. «Базисы Грёбнера и системы алгебраических уравнений», М. МЦНМО, 2003
6. D. Cox, J. Little, D. O'Shea. «Ideals, varieties and algorithms», Springer, 2015
7. D. Jungnickel. «Graphs, Networks and Algorithms», Springer, 2013
8. M. de Berg, O. Cheong, M. van Kreveld, M. Overmars. «Computational geometry: algorithms and applications», Springer, 2008

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 50% за решение домашних задач и 50% за итоговый экзамен, все округления происходят по стандартным правилам (до ближайшего целого, полуцелые округляются вверх).

Введение в алгебраическую топологию
учебная дисциплина для студентов 2-го курса и старше

ЛЕКТОР: М. Э. Казарян.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2018/19 уч. г., две пары в неделю, 6 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: Одна из наиболее ярких черт, отличающих математику XX века от всей предшествующей — появление и развитие алгебраической топологии. В настоящее время использование алгебро-топологического инструментария стало непременным атрибутом значительной части математических исследований. Сочетание геометрических идей с формализованными алгебраическими алгоритмами для вычисления топологических инвариантов привели к эффективному средству изучения многих математических структур, в том числе, и не связанных напрямую с топологией. Эта область математики породила, например, такие направления как гомологическая алгебра и теория алгебр Хопфа. В курсе предлагается значительное количество задач на вычисление алгебро-топологических характеристик различных топологических пространств.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: первый год бакалавриата (стандартные курсы алгебры, анализа, геометрии, комбинаторики и топологии)

ПРОГРАММА:

- Графы, поверхности, симплициальные комплексы, симплициальные отображения
- Пути, гомотопии путей, фундаментальная группа, накрытия, вычисление фундаментальной группы
- Цепные комплексы векторных пространств, гомологии с коэффициентами в поле, гомологии симплициальных комплексов, гомологии с коэффициентами в абелевой группе
- Когомологии симплициальных комплексов. Умножение в когомологиях
- Клеточные комплексы и клеточные гомологии. Многообразия. Двойственность Пуанкаре. Элементы теории Морса. Неравенства Морса

УЧЕБНИКИ:

- Васильев В. А. Введение в топологию. — М.: Фазис, 1997
- Прасолов В. В. Элементы теории гомологий. — М.: МЦНМО,2006
- Фоменко А. Т., Фукс Д. Б. Курс гомотопической топологии. — М.: Наука, 1989
- Hatcher A. Algebraic Topology

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 50% за решение домашних задач и 50% за итоговый экзамен, все округления происходят по стандартным правилам (до ближайшего целого, полуцелые округляются вверх).

Введение в алгебраические группы и их инварианты
учебная дисциплина для студентов 3-го курса и старше

ЛЕКТОР: В. С. Жгун.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2018/19 уч. г., две пары в неделю, 6 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: Геометрическая теория и классическая теория инвариантов алгебраических групп — очень важный раздел современной математики. С первыми примерами инвариантов линейных преобразований, такими как определитель, след, характеристический многочлен каждый встречается уже на первом курсе линейной алгебры. Классическая теория инвариантов посвящена описанию алгебры инвариантов классических групп, таких как полная линейная группа, ортогональная и симплектическая группа. В свою очередь, геометрическая теория инвариантов, которая берет свое начало в работах Гильберта и Мамфорда, посвящена исследованию геометрических свойств инвариантов, например, построению и исследованию геометрии различных фактор-пространств, и является основным инструментом для построения пространств модулей (кривых, векторных расслоений и проч.). В курсе мы затронем как классическую теорию инвариантов так и геометрическую. Также мы изучим эквивариантные вложения однородных пространств.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: требуется знание линейной алгебры и теории представлений конечных групп (последнее — главным образом для того, чтобы используемые конструкции не вызывали удивления); весьма полезно знание групп и алгебр Ли и основ алгебраической геометрии.

ПРОГРАММА:

1. Алгебраические группы и их алгебры Ли.
2. Действия алгебраических групп. Орбиты стабилизаторы однородные пространства. Теорема Шевалле.
3. Многообразия флагов. Действие разрешимых групп на полных многообразиях. Теорема Бореля (Ли – Колчина) о неподвижной точке.
4. Сопряженность борелевских подгрупп, максимальных торов, картановских подгрупп.
5. Структурная теория полупростых алгебраических групп.
6. Действие редуктивных групп на аффинных многообразиях. Конечная порожденность алгебры инвариантов (теорема Гильберта).
7. Категорный фактор. Геометрический фактор. Существование категорного фактора для действия редуктивных групп на аффинных многообразиях.
8. Теорема Нётер о степенях образующих алгебры инвариантов.
9. Теория инвариантов классических групп.
10. Действие редуктивных групп. Линеаризация обратимого пучка. Группа G-линеаризованных линейных расслоений $\mathrm{Pic}_G(X)$.
11. Полустабильные и стабильные точки. Фактор Мамфорда.
12. Численный критерий стабильности.
13. Критерий Гильберта – Мамфорда.
14. Критерий Попова стабильности действия на аффинном многообразии.

15. Теорема Луны о слайсе. Стратификация и разрешение особенностей нуль-конуса.
16. Отображение моментов. Замкнутость орбит, критерий Кемпфа – Несс.
17. Стратификация Хесселинка множества нестабильных точек.
18. Пространства модулей кривых.
19. Вариация фактора Мамфорда при изменении обильного обратимого пучка.
20. Свойства U-инвариантов, деформация к орисферическому многообразию.

УЧЕБНИКИ:

1. D. Mumford, J. Fogarty and F. Kirwan, Geometric invariant theory, 3rd. edition, Ergebnisse Math. 34, Springer-Verlag, Berlin, 1994
2. I. V. Dolgachev, Introduction to Geometric Invariant Theory, Lect. Notes Series, **25**, Seoul Nat. Univ., 1994.
3. Э. Б. Винберг, В. Л. Попов, Итоги науки и техн. ВИНИТИ, Совр. пробл. мат., Фунд. направл., т. 55, 1989, с. 137–309.
4. J. E. Humphreys, Linear algebraic groups, Graduate Texts in Math., no. 21, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1975. (Пер. на рус. яз.: Хамфри Д. Линейные алгебраические группы. — М.: Наука, 1980.)
5. Х. Крафт, Геометрические методы в теории инвариантов, Москва: Мир, 1987.
6. F. Knop, H. Kraft, T. Vust, The Picard group of a G-variety. Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie (H. Kraft, P. Slodowy, T. Springer eds.) DMV-Seminar **13**, Birkhauser Verlag (Basel–Boston) (1989), 77–88.
7. D. A. Timashev, *Homogeneous spaces and equivariant embeddings*, Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups VIII (R. V. Gamkrelidze, V. L. Popov, eds.), Encyclopædia Math. Sci., vol. 138, Springer-Verlag, Heidelberg–Dordrecht–London–New York, 2011.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: $1/3\times$(решение задач из листков) $+ 1/3\times$(итоговый устный экзамен)

КОММЕНТАРИЙ: Устный экзамен состоит из двух вопросов и одной задачи, близкой по тематике к задачам из листков.

Введение в коммутативную алгебру
учебная дисциплина на английском языке для студентов 2-го курса и старше
(see also the description in English)

ЛЕКТОР: **А. С. Хорошкин.**

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: **осенний семестр 2018/19 уч. г., две пары в неделю, 6 кредитов за семестр.**

ОПИСАНИЕ: Классическая алгебраическая геометрия изучает геометрию множества решений полиномиальных уравнений. В простейшей ситуации коэффициенты полиномиального уравнения принадлежат алгебраически замкнутому полю. Рассмотрение полиномиальных уравнений с коэффициентами в разных кольцах, таких как, например, кольцо целых в полях алгебраических чисел, приводит к вопросам и задачам современной алгебраической геометрии и современной алгебраической теории чисел. Коммутативная алгебра является удачным инструментом, помогающим при ответах на простейшие вопросы о множествах решений системы полиномиальных уравнений, таких как конечная порождённость системы, существования решения в подходящем расширении, вычислении размерности и количества неприводимых компонент, а также в вопросах гладкости.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Обязательные курсы первых 3 семестров, предлагаемые на факультете математики. В частности, (а) основы алгебры (группы, кольца, поля) (б) линейная алгебра (включая понятие тензорного произведения) (в) базовый курс геометрии.

ПРОГРАММА:

- Кольца, алгебры, идеалы, модули. Нётеровы кольца.
- Факториальные кольца. Кольца и модули частных.
- Целая зависимость и лемма Нётер о нормализации. Теоремы о спуске и подъёме.
- Пределы, копределы и тензорное произведение. Плоские и проективные модули.
- Теорема Гильберта о нулях. Спектр кольца.
- Размерность Крулля и степень трансцендентности.
- Примарное разложение.
- Кольца дискретного нормирования и дедекиндовы области.
- Теория размерности нетеровых колец.
- Функция Гильберта.

УЧЕБНИКИ:

- M. Reid, «Undergraduate commutative algebra.» Vol. 29. Cambridge University Press, 1995.
- М. Атья И. Макдональд. «Введение в коммутативную алгебру», Мир, Москва (1972)
- G. Kemper. «A course in commutative algebra.» Vol. 256. Springer Science & Business Media, 2010.
- D. Eisenbud. «Commutative Algebra: With a View Toward Algebraic Geometry.» New York, NY: Springer-Verlag, 1999.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Итоговая оценка является взвешенной суммой

- итогового письменного экзамена (50%),
- письменной промежуточной контрольной (30%),
- небольших тестов, проводимых на семинарах (30%).

Введение в лингвистику
учебная дисциплина для студентов 1-го курса и старше

ЛЕКТОР: Б. Л. Иомдин.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2018/19 уч. г., две пары в неделю, 6 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: Лингвистика изучает устройство человеческого языка. Именно на человеческом языке — на разных языках — мы получаем большую часть информации о мире, ещё большую часть этой информации мы на человеческом языке обрабатываем, и практически все результаты этой обработки мы на человеческом языке обсуждаем. Поэтому очень важно понимать, как устроен человеческий язык в целом и конкретные языки в частности. Цель курса — рассказ о том, как современная лингвистика представляет себе устройство языка. На лекциях приводятся примеры из десятков языков мира, а на семинарах и в домашних заданиях студенты самостоятельно анализируют материал тех языков, которые *не* обсуждались на лекциях, в основном решая самодостаточные лингвистические задачи. Решение этих задач не требует никаких предварительных знаний, а рассчитано на умение логически мыслить; в результате мы будем узнавать много нового о том, как разнообразны языки, и обсуждать, как справляться с этим многообразием. Помимо лингвистических задач, некоторые домашние задания связаны с самостоятельным анализом языковых данных, полученных в интернете.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: нет.

ПРОГРАММА:

1. Вводная часть: язык как система. Когда появилась лингвистика. Что изучает лингвистика. Синхрония и диахрония. Семиотика. Свойства языковых знаков. Омонимия и многозначность. Многозначность на разных уровнях языка.

2. Происхождение, функционирование и развитие естественных языков. Происхождение языка. От языка животных к языку людей. Избыточность языкового знака. Свойства естественного языка. Функции языка. Социальные формы существования языка. Диалектный континуум. Основные понятия лингвистической компаративистики. Регулярные фонетические соответствия. Глоттохронология. Языковая систематика. Генеалогическая классификация языков.

3. Языки мира. Обзор языков мира. Основные графические системы.

4. Грамматика и лексика. Лексическое и грамматическое значение. Свойства грамматических значений. Грамматикализация и деграмматикализация. Грамматические категории. Интегральное описание языка.

5. Фонетика. Фонетика: основные понятия. Артикуляционная классификация звуков. Акустическая классификация звуков. Фонология.

6. Морфология. Морфема и морфемика. Основные типы аффиксов. Словообразование и словоизменение. Основа и флексия. Грамматические средства языка. Типологическая классификация языков. Историческая морфология.

7. Синтаксис. Предложение и высказывание. Синтаксические структуры. непосредственно составляющие. деревья зависимостей. гибридные структуры. Типы синтаксических отношений в модели «Смысл↔Текст». Синтаксически размеченный корпус SynTagRus. Свойства синтаксических отношений. Свойства синтаксических структур. Синтаксические признаки. Гипотеза глубины.

8. Лексическая семантика. История семантики. Идеи современной семантики. Омонимия и синонимия. Омонимия и полисемия. Типы полисемии. Мышление и язык. Языковая картина мира.

9. Лексикография. История лексикографии. Толковые словари. Принципы системной лексикографии. Естественные метаязыки. Natural Semantic Metalanguage. Московская семантическая школа.

10. Корпусная лингвистика. Лингвистика в докомпьютерную эпоху. «Революция в лингвистике». Корпус текстов.

УЧЕБНИКИ:

1. С. А. Бурлак, С. А. Старостин. Сравнительно-историческое языкознание. М., 2005.
2. М. А. Кронгауз. Семантика. М., 2005.
3. М. Копотев. Введение в корпусную лингвистику. Электронное издание . Прага, 2014.
4. Дж. Лайонз. Язык и лингвистика: Вводный курс. М., 2004.
5. В. А. Плунгян. Общая морфология: Введение в проблематику. М., 2012.
6. Я. Г. Тестелец. Введение в общий синтаксис. М., 2001.
7. А. Я. Шайкевич. Введение в лингвистику. М., 2010.
8. A. Akmajian, R. A. Demers, A. K. Farmer, R. M. Harnish. Linguistics. An Introduction to Language and Communication. MIT Press, 2010.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: итоговая оценка ставится по результатам выполнения трёх домашних заданий.

Введение в римановы поверхности
учебная дисциплина на английском языке для студентов 2-го курса и старше
(see also the description in English)

ЛЕКТОР: С. М. Львовский.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2018/19 уч. г., две пары в неделю, 6 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: Цель курса — продемонстрировть, как работают некоторые основные идеи алгебраической геометрии, не прибегая к «тяжелой» технике.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Теория функций комплексного переменного, топология–1, анализ на многообразиях (основы).

ПРОГРАММА:

1. Определения. Компактная риманова поверхность, ассоциировананя с алгебраическим уравнением.
2. Дифференциалы, вычеты, дивизоры. Род компактной римановой поверхности.
3. Компактная риманова поверхность, ассоциированная с гладкой или нодальной плоской кривой. Вычет Пуанкаре.
4. Теорема Римана о существовании (без доказательства). Теорема Римана – Роха.
5. Линейные системы и линейные расслоения.
6. Канонические кривые. Теорема Кастельнуово и Де Франкиса.
7. Якобиево многообразие. Теоремы Абеля и Якоби.
8. Тэта-дивизор. Теорема Торелли.

УЧЕБНИКИ:

1. R.C.Gunning. Lectures on Riemann Surfaces.
2. Ph.Griffiths, J.Harris. Proinciples of Algebraic Geometry, Chapter 2.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 0.4 (результат контрольной) + 0.6 (результат экзамена). Округление вверх.

Введение в теорию категорий и гомологическую алгебру
учебная дисциплина для студентов 2-го курса и старше

ЛЕКТОР: А. Л. Городенцев.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2018/19 уч. г., две пары в неделю, 6 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: Язык категорий и функторов является универсальным средством выражения алгебраических свойств объектов и отображений между ними в той или иной теории, к какой бы области математики она не относилась. Умение думать на этом языке позволяет находить простые концептуальные ответы на многие кажущиеся трудными вопросы и угадывать правильные постановки новых интересных задач. Целью курса является овладение категорными конструкциями на естественных содержательных примерах и приобретение навыков работы с основным для абелевых категорий вычислительным инструментом — комплексами и их гомологиями.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: первый год бакалавриата (стандартные курсы алгебры, анализа, геометрии, комбинаторики и топологии).

ПРОГРАММА:

- Категории, функторы, предпучки. Примеры: симплициальные множества, предпучки на топологических пространствах. Категория функторов, лемма Ионеды, представимые функторы и задание объектов универсальными свойствами. ([GM], [G], [M])
- Сопряжённые функторы. Примеры: $\otimes$ и Hom, геометрическая реализация и сингулярные симплексы. Пределы диаграмм. Фильтрующиеся категории. Примеры: $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, неархимедово пополнение кольца $\mathbb{Z}$, локализация и некоммутативные дроби Оре. ([GM], [G], [M])
- Аддитивные, точные и абелевы категории. Диаграммный поиск, леммы о последовательностях. Прямые суммы и произведения. Инъективные, проективные, (ко)порождающие и компактные объекты. Характеризация категорий модулей, эквивалентность Мориты. Если позволит время: теорема о вложении. ([GM], [G], [M], [W])
- Категории комплексов, гомотопии и гомологии. Примеры: комплекс цепей симплициального множества, свободная резольвента модуля, резольвенты мономиальных идеалов. Длинная точная последовательность гомологий. Конус морфизма. ([GM], [W])
- Спектральные последовательности точной пары, фильтрованного комплекса и свёртки бикомплекса. ([GM], [W])
- Инъективные и проективные резольвенты, функторы Ext и Tor (на категории модулей). Умножения и свёртки. Комплексы Кошуля, теорема Гильберта о сизигиях. ([B], [W])
- Бар-резольвента. Когомологии алгебр и групп. Классифицирующие пространства. ([B], [W])
- Если позволит время: триангулированные категории и производная категория от абелевой категории. ([GM])

УЧЕБНИКИ:

[B] Н. Бурбаки, «Гомологическая алгебра» (Алгебра X).

[GM] С. И. Гельфанд, Ю. И. Манин, «Методы гомологической алгебры», часть I.

[G] А. Л. Городенцев, «Алгебра – 2».
http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-3/1415/algebra-2_2015.VI.15.pdf.

[M] С. Маклейн, «Категории для работающего математика».

[W] C. A. Weibel, «An Introduction to Homological Algebra».

КОММЕНТАРИЙ: курс будет близок к прочитанному осенью 2018 года:
http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/homalg/1819/list.html

Введение в квантовую теорию
учебная дисциплина для студентов 1-го курса и старше

ЛЕКТОР: В. В. Лосяков, П. Г. Гавриленко.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2018/19 уч. г., две пары в неделю, 6 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: … У нас нет лучшего средства для описания элементарных частиц, чем квантовая теория поля. Квантовое поле — это ансамбль бесконечного числа взаимодействующих *гармонических осцилляторов*. Возбуждения этих осцилляторов отождествляются с частицами. Особая роль гармонических осцилляторов связана с аддитивностью их спектра. Если E_1 и E_2 — энергетические уровни, то E_1+E_2 — тоже энергетический уровень. В точности таких свойств мы и ожидаем от элементарных частиц… Всё это очень в духе XIX столетия, когда люди пытались строить механические модели всех явлений. Я не вижу в этом ничего плохого, поскольку любая нетривиальная идея в определённом смысле верна. Мусор прошлого часто оказывается сокровищем настоящего (и наоборот). По этой причине мы будем смело прибегать к различным аналогиям при обсуждении наших основных проблем.

Александр Поляков

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: нет.

ПРОГРАММА:

1. Классическая теория на примере электромагнитной волны. Электромагнитная волна — набор гармонических осцилляторов. Гамильтонов подход.

2. Gedanken эксперименты со светом — прохождение через поляризатор и фотоэффект. Вывод: наш мир не классический. Соотношения неопределенности.

3. Состояния физической системы в квантовой теории. Собственные состояния. Принцип суперпозиции. Вероятность перехода из одного состояния в другое (амплитуда перехода). Пространство состояний — гильбертово пространство.

4. Наблюдаемые в квантовой теории — операторы на гильбертовом пространстве. Действие оператора на собственные состояния. Требование самосопряженности оператора. Измерение наблюдаемой как задача на собственные значения. Определение среднего значения и дисперсии наблюдаемой.

5. Соотношение неопределенности и одновременная измеримость физических величин. Канонические коммутационные соотношения. Каноническое квантование в квантовой теории. Полный набор наблюдаемых.

6. Динамика в квантовой теории. Уравнение Шредингера. Гамильтониан как наблюдаемая, определяющая динамику в квантовой теории. Задача на собственные значения и собственные состояния гамильтониана как задача, решающая вопрос о динамике произвольного состояния в квантовой механике.

7. Квантование гармонического осциллятора. Операторы рождения и уничтожения. Энергетический спектр и собственные состояния.

8. Когерентные состояния. Когерентные состояния как минимизирующие соотношение неопределенности. Динамика когерентного состояния. Разложение единицы для когерентных состояний. Предельный переход к классической теории.

УЧЕБНИКИ:

- П. Дирак. Принципы квантовой механики, 1979.
- Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. Фейнмановские лекции по физике.
- Л. Д. Фаддеев, О. А. Якубовский. Лекции по квантовой механике для студентов-математиков, 1980.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: оценка ставится по результату трёх письменных контрольных работ и одного коллоквиума.

Введение в теорию случайных процессов
учебная дисциплина на английском языке для студентов 3-го курса и старше
(see also the description in English)

ЛЕКТОР: М. Л. Бланк.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2018/19 уч. г., две пары в неделю, 6 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: Курс является продолжением стандартного курса по теории вероятностей (связанного в основном с комбинаторикой) и предназначен для первоначального ознакомления с теорией случайных процессов. Уделяется особое внимание связи этой теории с функциональным анализом и общей теорией меры. Курс ориентирован на бакалавров 2 – 4 курса, магистрантов и аспирантов.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: курсы анализа и теории вероятностей

ПРОГРАММА:

- Понятие случайного процесса.
- Элементы случайного анализа.
- Корреляционная теория случайных процессов.
- Марковские процессы с дискретным и непрерывным временем.
- Винеровский и пуассоновский процессы.
- Стохастический интеграл. Формула Ито.
- (Суб/супер)мартингалы.
- Инфинитезимальный оператор полугруппы.
- Стохастическая устойчивость динамических систем.
- Большие уклонения в марковских процессах и хаотической динамике.
- Нелинейные марковские процессы.

УЧЕБНИКИ:

- D. Stirzaker. Elementary probability, Cambrige University Press, 2003.
- А. Д. Вентцель. Курс теории случайных процессов. М.: Наука. Физматлит, 1996
- N. V. Krylov. Introduction to the theory of random processes. AMS. V.43, 2002.
- Б. Оксендаль. Стохастические дифференциальные уравнения, Москва, 2003.
- А. Н. Ширяев. Вероятность, 2 т. МЦНМО, 2007.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 0.4 (Накопленная оценка) + 0.6 (Экзамен), накопленная оценка определяется контрольными, сдачей листков и работой на лекциях и семинарах. Округление в большую сторону.

Введение в фробениусовы алгебры и зеркальную симметрию
НИС на английском языке для студентов 2-го курса и старше
(see also the description in English)

РУКОВОДИТЕЛЬ: **П. И. Дунин–Барковский, А. А. Басалаев.**

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: **весенний семестр 2018/19 уч. г., две пары в неделю, 6 кредитов за семестр.**

ОПИСАНИЕ: *Фробениусовы алгебры* — это ассоциативные алгебры с единицей, оснащённые определённым образом согласованной с произведением билинейной формой. Несмотря на простоту определения, они играют важную роль во многих интересных задачах из разных областей науки. Одной из таких областей является изучение особенностей вроде острия кривой $y^2 = x^3$ в точке $(0, 0)$ (ср. с особенностью кривой $y^2 = x^3 + x^2$ в той же точке). Курс начнётся с определения фробениусовых алгебр, обсуждения их свойств и примеров. Затем мы обсудим основы теории особенностей и связь фробениусовых алгебр с этой теорией, а также появление фробениусовых алгебр в физике (в частности, т.н. «двумерные топологические квантовые теории поля», которые далеко не так страшны, как их название). В конце курса будут упомянуты фробениусовы многообразия, для этого будут даны все необходимые базовые сведения.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: алгебра и геометрия для первого курса бакалавриата.

ПРОГРАММА:

1. Алгебры со спариванием, фробениусовы алгебры. Эквивалентные формулировки, единственность спаривания, ограничения, вытекающие из условия фробениусовости.
2. Примеры не-фробениусовых ассоциативных коммутативных алгебр. Формальное описание фробениусовых алгебр в терминах единицы, коединицы и тензора произведения. Описание соответствующих графов и кобордизмов.
3. Фробениусовы алгебры, приходящие из теории особенностей: примеры A, D, E.
4. Корневые системы типов A, D, E, группы Кокстера, структура фробениусовой алгебры на пространстве инвариантных многочленов.
5. Фробениусовы алгебры, происходящие из когомологий многообразий. Пример: $\mathbb{CP}^n$.
6. Аксимы Атьи двумерных топологических квантовых теорий поля. Связь с физикой.
7. Зеркальная симметрия как изоморфизм фробениусовых алгебр, некоторые простые примеры.
8. Многообразия с произведением. Ассоциативные и коммутативные случаи, F-многообразия.
9. F-многообразия, связанные с деформацией особенностей: примеры A, D, E.

УЧЕБНИКИ:

- J.Kock, «Frobenius Algebras and 2d Topological Quantum Field Theories», Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- C.Hertling, «Frobenius Manifolds and Moduli Spaces for Singularities», Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- С.М.Натанзон, «Геометрия двумерных топологических теорий поля», МЦНМО, Москва, 1998.

- В.И.Арнольд, В.А. Васильев, В.В. Горюнов, О.В. Ляшко, «Особенности. I. Локальная и глобальная теория», ВИНИТИ, Москва, 1988.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: итоговая оценка равна $\min(10, \lceil S + C + T + E \rceil)$, где

- $\lceil \ldots \rceil$ означает округление вверх
- $S \in [0, 4]$ — оценка за сдачу листков
- $C \in [0, 4]$ — оценка за самостоятельные работы на семинарах (проводимые раз в несколько занятий)
- $T \in [0, 3]$ — оценка за 30-минутный доклад на одном из семинаров
- $E \in [0, 5]$ — оценка за устный экзамен.

Если накануне экзамена выполняется условие $\min(10, \lceil S+C+T \rceil) \geqslant 8$, то эта оценка при желании студента может быть выставлена в качестве итоговой без экзамена.

Введение в теорию чисел
учебная дисциплина для студентов 1-го курса и старше

ЛЕКТОР: В. З. Шарич.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2018/19 уч. г., две пары в неделю, 6 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: Теория чисел состоит из множества разнообразных вопросов и методов их исследования. Курс содержит две части. Первая часть посвящена подробному изучению элементарной теории чисел с использованием инструментов высшей математики. Вторая часть даст слушателям представление о возможных направлениях углубления и основных результатах в рамках этих направлений.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: первый год бакалавриата (стандартные курсы алгебры, анализа, геометрии, комбинаторики и топологии)

ПРОГРАММА:

1. **Делимость и простые числа.** Евклидовы кольца $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}[i]$. Алгоритм Евклида. Линейное представление НОД. Основная теорема арифметики. p-показатели. Лемма об уточнении степени. Постулат Бертрана.

2. **Кольца вычетов по модулю.** Обратимые вычеты. Теорема Вильсона. Функция Эйлера и её свойства. Теорема Эйлера. Китайская теорема об остатках. Теорема Шевалле. Примитивные вычеты. Квадратичные вычеты (критерий Эйлера, квадратичный закон взаимности Гаусса).

3. **Цепные (непрерывные) дроби.** Свойства цепных дробей. Приближение иррациональных чисел рациональными. Цепные дроби квадратичных иррациональностей.

4. **Задачи на решётках.** Формула Пика. Теорема Блихфельда. Лемма Минковского. Теорема Кронекера. Равномерно распределённые последовательности. Теорема Ван-дер-Вардена.

5. **Многочлены над $\mathbb{Z}$.** Неприводимые многочлены. Лемма Гаусса. Признак Эйзенштейна. Признак Дюма.

6. **Диофантовы уравнения.** Линейные диофантовы уравнения. Методы решения нелинейных диофантовых уравнений: метод остатков, метод разложений, метод оценок, метод спуска. Пифагоровы тройки. Уравнения Пелля. Суммы двух квадратов. Суммы четырёх квадратов.

7. **Основы алгебраической теории чисел.** Конечные расширения $\mathbb{Q}$. Лемма о простом расширении. Кольцо целых. Поле алгебраических чисел $\mathbb{A}$. Алгебраическая замкнутость $\mathbb{A}$. Теорема Лиувилля. Теорема Линдемана (б/д). Трансцендентность π и e.

8. **Основы аналитической теории чисел.** Гамма-функция Эйлера. Дзета-функция Римана. Ряды Дирихле, теорема Дирихле об арифметических прогрессиях (б/д). Теорема Чебышёва о распределении простых чисел.

9. **Основы комбинаторной теории чисел.** Теорема Коши – Дэвенпорта. Теорема Плюннеке – Ружа. Теорема Семереди (б/д). Теорема Грина – Тао (б/д).

10. **p-адические числа.** Неархимедовы нормы в $\mathbb{Q}$ и пополнения $\mathbb{Q}$ по ним. Кольцо $\mathbb{Z}_p$ и его свойства. Лемма Гензеля.

УЧЕБНИКИ:

[D] Г. Дэвенпорт, «Введение в теорию чисел».

[B] А. Бухштаб, «Теория чисел».

[H] Г. Хассе, «Лекции по теории чисел».

[V] И. М. Виноградов, «Основы теории чисел».

[U] В. В. Вавилов, А. В. Устинов «Многоугольники на решётках».

[W] Г. Вейль, «Введение в алгебраическую теорию чисел».

[N] М. Натансон, «Обратные задачи теории чисел».

[K] С. Б. Каток, «p-адический анализ в сравнении с вещественным».

[P] В. В. Прасолов, «Многочлены».

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: итоговая оценка равна $0,1\,K_1+0,1\,K_2+0,1\,K_т+0,3\,C+0,4\,E$, где $K_{1,2}$ — оценки за контрольные, $K_т$ — средняя из трёх лучших оценок за теоретические контрольные, что будут на лекциях, C — оценка за коллоквиум в середине курса, E — оценка за экзамен в конце курса. Округление до ближайшего целого, полуцелые числа округляются вверх.

Введение в эргодическую теорию
НИС на английском языке для студентов 2-го курса и старше
(see also the description in English)

РУКОВОДИТЕЛЬ: М. Л. Бланк.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2018/19 уч. г., одна пара в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Можно ли отличить детерминированную хаотическую динамику от чисто случайной и имеет ли этот вопрос смысл? Влияет ли необратимость динамики на качественные характеристики процесса? Эргодическая теория изучает эти и другие статистические свойства динамических систем. Интерес к этой проблематике связан с тем, что «типичные» детерминированные динамические системы (например, дифференциальные уравнения) демонстрируют хаотическое поведение: их траектории выглядят как реализации случайных процессов. Мы начнем с классических результатов Пуанкаре, Биркгофа, Хинчина, Колмогорова и дойдем до современных постановок (в том числе и нерешенных) задач. Курс является вводным и ориентирован на бакалавров 2–4 курса, магистрантов и аспирантов. Естественным его продолжением является сколковский курс «Динамика и эргодическая теория». Предварительных знаний кроме курса мат. анализа не требуется (хотя они и желательны).

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: курс анализа.

ПРОГРАММА:

1. Динамические системы: траектории, инвариантные множества, простые и странные аттракторы и их классификация, хаотичность.
2. Топологические свойства измеримой динамики.
3. Действие в пространстве мер, понятие трансфер-оператора, инвариантные меры. Сравнение со случайными марковскими процессами.
4. Эргодичность, теорема Биркгофа, перемешивание, ЦПТ. Меры Синая–Боуэна–Рюэлля и естественные/наблюдаемые меры.
5. Основные эргодические конструкции: прямые и косые произведения, производное и интегральное отображения, естественное расширение и проблема необратимости.
6. Эргодический подход к задачам теории чисел.
7. Энтропия: метрический и топологический подходы.
8. Операторный формализм. Спектральная теория динамических систем. Банаховы пространства мер, случайные возмущения.
9. Многокомпонентные системы: синхронизация и фазовые переходы.
10. Математические основания численного моделирования хаотической динамики.

УЧЕБНИКИ:

1. М. Бланк. «Устойчивость и локализация в хаотической динамике», МЦНМО, Москва, 2001.
2. И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин. «Эргодическая теория», Наука, Москва, 1980.
3. A. Katok, B. Hasselblatt. «Introduction to the modern theory of dynamical systems», 1995.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 0.4 (Накопленная оценка) + 0.6 (Экзамен). Накопленная оценка определяется контрольными, сдачей листков и работой на лекциях и семинарах. Округление в большую сторону.

Геометрические структуры на многообразиях
НИС для студентов 3-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛИ: Д. Б. Каледин, М. С. Вербицкий, В. С. Жгун.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2018/19 уч. г., две пары в неделю, 6 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: Семинар ориентирован на студентов и аспирантов, интересующихся геометрией в самом широком смысле. Кроме ликбеза, необходимого для занятия современной математикой и понимания текущей литературы, участники семинара пьют чай и делают доклады по разным статьям, от классики и до недавно опубликованных препринтов.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: многообразия, группы Ли, алгебра де Рама, векторные расслоения.

ПРОГРАММА:

1. Ликбез по широкому спектру геометрических дисциплин, в основном алгебраической геометрии.
2. Собственные работы студентов и выжимки из текущей литературы.
3. Чай с плюшками, баранки, пряники, мармелад.

УЧЕБНИКИ:

1. Sylvestre Gallot, Dominique Hulin, Jacques Lafontaine. Riemannian Geometry.
2. Ж.-П. Серр. Алгебры Ли и группы Ли.
3. Дж. Милнор, Дж. Сташеф. Характеристические классы.
4. А. С. Мищенко. Векторные расслоения и их применения.
5. Jean-Pierre Demailly. Complex analytic and differential geometry.
6. С. И. Гельфанд, Ю. И. Манин. Методы гомологической алгебры. Том 1. Введение в когомологии и производные категории.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Итоговая оценка зависит от активности участия студента в семинаре.

Геометрия и анализ дифференциальных уравнений
НИС для студентов 3-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛЬ: И. В. Вьюгин, В. А. Побережный.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2018/19 уч. г., одна пара в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Основными предметами нашего курса будут аналитическая теория дифференциальных уравнений, обратные задачи монодромии и вопросы интегрируемости. Всё это тесно связано с комплексным анализом и геометрией, практически не пересекаясь с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений. Использующиеся конструкции и подходы, как правило, имеют видимый геометрический смысл, а результаты имеют многочисленные приложения в современной математике и теоретической физике, в первую очередь, при исследовании интегрируемых систем.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: гладкие многообразия, дифференциальные уравнения, ТФКП.

ПРОГРАММА:

1. Комплексные дифференциальные уравнения
2. Особые точки
3. Инварианты
4. Монодромия
5. Распределения, симметрии и интегрируемость

УЧЕБНИКИ:

1. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. Гостехтериздат, 1941.
2. Болибрух А. А. Обратные задачи аналитической теории дифференциальных уравнений. МЦНМО, 2009.
3. Lychagin Lectures on geometry of differential equations I,II. Roma, 1992.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: накопленная оценка (работа на семинаре, листки) округляется до ближайшего целого, полуцелые значения округляются вверх.

Геометрия и группы
НИС для студентов 1-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛЬ: О. В. Шварцман.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2018/19 уч. г., одна пара в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: сначала предполагается основательно изучить планиметрию Лобачевского, а затем заняться изучением симметричных замощений плоскости Лобачевского и их приложений в теории чисел, анализе и комбинаторике.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: твёрдое знание евклидовой планиметрии.

ПРОГРАММА:

1. Планиметрия Лобачевского (в модели верхней полуплоскости): что в ней так, как в евклидовой, а что не так.
2. Поучительные примеры замощений плоскости Лобачевского, обладающие большой группой симметрии (генетическое введение в теорию фуксовых групп).
3. Приложения.

УЧЕБНИКИ:

1. В. В. Прасолов. Геометрия Лобачевского. МЦМНО, 2016.
2. Мамфорд, Райт, Сирис. Ожерелье Индры. МЦМНО, 2011.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: итоговая оценка за полугодие равна $0.5\,N + 0.5\,E$, где E — оценка за итоговый экзамен, а $N = \min(10, 0.1\,S + 0.9\,K)$, где S — число семинаров, которые Вы посетили, а K — оценка за контрольную. Все округления происходят до ближайшего целого числа.

Геометрия и динамика
НИС для студентов 1-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛИ: А. В. Клименко, Г. И. Ольшанский, А. С. Скрипченко.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2018/19 уч. г., одна пара в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Семинар рассчитан на студентов 1–2 курса бакалавриата. Мы предполагаем рассказать слушателям о понятиях, методах и результатах из различных разделов геометрии, динамики и смежных областей. При этом нередко соображения из одной области будут использоваться в работе с объектами другой природы. В течение двух лет разбираемые сюжеты почти не повторяются.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: нет

ПРОГРАММА: НИС состоит из почти независимых блоков в 1–3 занятия. Вот некоторые из тем, запланированные на этот год:

- теория Пуанкаре – Бендиксона: почему большинство систем, состояние которых задаётся точкой на плоскости, либо стабилизируются, либо выходят в режим периодических колебаний? что изменится в более высокой размерности?
- марковские сдвиги: все самые главные свойства динамических систем, от транзитивности до перемешивания, в терминах линейной алгебры.
- энтропия динамической системы: как измерить «случайность» поведения системы почему энтропия измеряет сложность?
- диффеоморфизмы окружности: классификация с точностью до сопряжения, инвариант классификации (число вращения), достаточность его для классификации, поведение числа вращения в семействах
- хаотическая динамика: что общего у кота Арнольда, отображение пекаря и бильярда Бунимовича?
- цепные дроби: как динамика помогает теории чисел и причем тут геодезические?
- фракталы: как комплексная динамика служит физике, биологии и социальным наукам?
- геометрия пространств флагов

УЧЕБНИКИ:

- А. Б. Каток, Б. Хасселблат. Введение в теорию динамических систем с обзором последних достижений.М.:МЦНМО,2005.
- С. Табачников. Геометрия и биллиарды. Библиотека журнала «Реальная и хаотическая динамика», М.-Ижевск, 2011.
- У. Фултон. Таблицы Юнга и их приложения к теории представлений и геометрии. Москва, МЦНМО, 2006.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: В конце семестра проводится экзамен, состоящий в устном обсуждении решений выданных заранее для домашнего решения задач, покрывающих большую часть материала семестра (около 5 задач, оценка «10» выставляется за решение примерно 80% из них). При этом работа в течение семестра учитывается следующим образом.
1) Студент, успешно выступивший на семинаре с докладом, получает оценку «10» (выступление с докладом — необходимое условие допуска студентов старших курсов к включению этого НИСа в свой ИУП).
2) В течение семестра проводится несколько (2–4) небольших письменных проверочных работ. По результатам проверочной работы студенту могут быть автоматически зачтены (полностью или частично) задачи на ту же тему из итогового экзамена.

КОММЕНТАРИЙ: Весенний семестр можно, хотя и не рекомендуется, брать без осеннего. В случае, если этот НИС уже был взят один раз в прошлом году, разрешается взять его во второй раз. **Студенты старших курсов (3–4 курс и магистранты) могут включать этот НИС в свой ИУП только по предварительной договорённости с руководителями семинара.**

Графы на поверхностях
НИС для студентов 1-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛЬ: Н. Я. Амбург.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2018/19 уч. г., одна пара в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Александр Гротендик образно и поэтично называл *детскими рисунками*[1] графы, начерченные без отрыва карандаша на двумерной поверхности так, что их рёбра не перекасются нигде, кроме тех вершин, в которых им положено пересекаться. Занятия детскими рисунками не требуют никакой специальной подготовки и позволяют играючи овладеть такими фундаментальными топологическими инвариантами графов и поверхностей, как род и эйлерова характеристика. С другой строны, изучение детских рисунков довольно быстро приводит к нетривиальным задачам и концепциям, лежащим в самом сердце алгебраической геометрии, теории чисел и математической физики. Именно в исследовании понятных каждому школьнику объектов, вроде детских рисунков, Гротендик видел способ преодоления сложившегося в последнее время барьера чрезмерной сложности и техничности, отпугивающего способных молодых людей от занятия современной математикой[2]. В этом курсе мы начинём с азов маломерной комбинаторной топологии и с разных точек зрения обсудим несколько красивых и наглядных задач, находящихся в центре наиболее пристального внимания сегодняшних математиков и физиков.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: нет.

ПРОГРАММА:

1. Классификация двумерных компактных связных поверхностей без края.
2. Детские рисунки Гротендика. Формула Эйлера.
3. Группа вращения ребер. Автоморфизмы детского рисунка.
4. Математические бильярды. Намотки тора.
5. Римановы поверхности. Пара Белого. Математический бильярд как Риманова поверхность.
6. Матричные модели и ленточные графы. Производящие функции для графов на поверхностях.
7. Склейки $2n$-угольника и формула Харера – Цагира.

УЧЕБНИКИ:

1. Мищенко А. С., Фоменко А. Т., Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии.
2. Звонкин А. К., Ландо С. К., Графы на поверхностях и их приложения.
3. Гальперин Г. А., Земляков А. Н., Математические бильярды.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Оценка за курс вычисляется из общего числа задач, решённых в течение семестра, по формуле:

$$\min\left(10, 10\,\frac{\text{суммарное число решённых задач, включая необязательные}}{\text{суммарное число обязательных задач}}\right).$$

[1] *Dessins d'enfant*.

[2] См. Grothendieck A., Esquisse d'un programme, где намечено несколько маршрутов, способных сократить путь от простого к сложному.

Группа кос, R-матрицы и квантовые группы
НИС для студентов 3-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛЬ: П. А. Сапонов, П. Н. Пятов.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2018/19 уч. г., две пары в неделю, 6 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: В этом курсе мы обсуждаем несколько тем из теории группы кос и теории квантовых групп, в которых появляется и применяется один из самых известных объектов современной математической физики — так называемая R-матрица. R-матрица в узком понимании этого термина, с которым мы, в основном, и будем иметь дело, — это решение (кубического матричного) уравнения Янга – Бакстера, известного также как соотношение Артина или уравнение кос. Сферы применения R-матриц в настоящее время очень разнообразны — от теории точно решаемых моделей статистической физики и теории поля до проблем построения инвариантов узлов, структурной теории и теории представлений квантовых матричных алгебр. В курсе мы знакомим слушателей с алгебраическими корнями происхождения R-матрицы и ее ролью в теории инвариантов узлов и теории квантовых групп (см. программу курса). Очень важные для современной теоретической физики приложения R-матриц в теории интегрируемых моделей обсуждаются в матфизическом спецкурсе «Анзац Бете».

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: линейная алгебра, теория групп и теория представлений в пределах первых двух курсов матфака. Желательно знакомство с основами теории групп и алгебр Ли и алгебр Хопфа. Впрочем, все необходимые понятия будут напоминаться в процессе занятий.

ПРОГРАММА:

- Группа кос, ее геометрическое и алгебраическое представления. Конечномерные факторы группы кос и ее групповой алгебры: симметрическая группа, алгебры Ивахори – Гекке и Бирман – Мураками – Венцля.
- Классификация неприводимых представлений алгебр Ивахори – Гекке: подход в духе Вершика – Окунькова.
- R-матричные представления группы кос. Примеры: R-матрицы $\mathrm{GL}(m|n)$, $\mathrm{O}(n)$ и $\mathrm{Sp}(n)$ типов.
- Марковский след на алгебре Ивахори – Гекке. R-след и R-матричная техника. Приложения в теории инвариантов зацеплений и в квантовых спиновых цепочках.
- Понятие об алгебрах Хопфа. Коумножение, коединица и антипод с точки зрения теории представлений. Двойственные алгебры Хопфа.
- Коммутативная алгебра с пуассоновой структурой и ее квантование.
- Алгебра функций на группе и скобка Склянина как пример r-матричной скобки Пуассона. Квантованная алгебра функций на группе: R-матричный подход (так называемая RTT-алгебра).
- Алгебра функций на двойственном пространстве к алгебре Ли $\mathfrak{gl}(n)$, квантование пучка скобок Пуассона, алгебра уравнения отражений с R-матрицей $\mathrm{GL}(n)$ типа.
- Структура алгебры уравнения отражений $\mathrm{GL}(n)$ типа, характеристическая подалгебра, квантовая версия теоремы Гамильтона – Кэли, спектр квантовой матрицы.
- Теория конечномерных разложимых представлений алгебры уравнения отражений $GL(n)$ типа.

УЧЕБНИКИ:

1. O. Ogievetsky, P. Pyatov, «Lecture on Hecke algebras». Preprint CPT-2000/P.4076
2. J. S. Birman and T. E. Brendle, «Braids: a Survey», arXiv:math/0409205 [math.RT]. In: «Handbook of Knot Theory», edited by: W. Menasco and M. Thistlethwaite, Elsevier B. V. 2005
3. Кассель К., «Квантовые группы», Фазис, 1999.
4. A. Klimyk, K. Schmuedgen, «Quantum groups and their representations», Springer, 1997.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: за выполненные заданий из листков ставится оценка $0 \leqslant N \leqslant 10$. Если $N \geqslant 8$, то итоговая оценка равна N. Если $N < 8$, то сдаётся письменный экзамен, и итоговая оценка равна $(E+N)/2$, где $0 \leqslant E \leqslant 10$ — оценка за экзамен, и округление происходит по обычным правилам.

Динамические системы
НИС для студентов 3-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛЬ: Ю. С. Ильяшенко.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2018/19 уч. г., одна пара в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Семинар посвящён теории динамических систем в ее разных аспектах: многомерные динамические системы и хаос, теория аттракторов, дифференциальные уравнения на плоскости, комплексные дифференциальные уравнения, теория бифуркаций. Семинар преследует две цели: научить младших участников азам перечисленных теорий; вовлечь всех участников в современные исследования.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Математический анализ и дифференциальные уравнения.

ПРОГРАММА: Мозаика из перечисленных выше теорий

УЧЕБНИКИ: Гукенхеймер Дж., Холмс П. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей; Арнольд В. Дополнительные главы теории дифференциальных уравнений; Ильяшенко Ю., Ли Вейгу, Нелокальные бифуркации; Ильяшенко Ю., Яковенко С., Аналитическая теория дифференциальных уравнений.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 40% за посещение, 20% за активность, 40% за один доклад в году.

Дифференциальная теория Галуа
НИС для студентов 2-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛЬ: С. О. Горчинский.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2018/19 уч. г., одна пара в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Классическая теория Галуа изучает симметрии множества решений полиномиальных уравнений, соответствующие группы симметрий являются конечными группами. Дифференциальная теория Галуа изучает симметрии пространства решений обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом группы симметрий оказываются алгебраическими группами. Дифференциальную теорию Галуа можно воспринимать как алгебро-геометрический подход к исследованию ОДУ. Данная теория возникла еще в работах великих классиков XIX века, потом была строго обоснована Э. Колчиным в первой половине XX века, и продолжает активно развиваться и в наши дни, имея множество приложений в анализе, геометрии, гамильтоновой механике и арифметике.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: от слушателей потребуется знание классической теории Галуа, основных понятий алгебры (группы, кольца, идеалы), знакомство с основными понятиями аффинной алгебраической геометрии (соответствие между кольцами и аффинными схемами, неприводимость, размерность, гладкость аффинных схем), знание основ комплексного анализа (голоморфные функции, римановы поверхности), владение общими понятиями геометрии (многообразия, расслоения, пучки), а также элементарное знакомство с ОДУ. Опыт использования языка теории категорий (представимые функторы, абелевы категории) также полезен, но строго обязательным не является.

ПРОГРАММА:

1. Дифференциальные кольца, поля, модули
2. Линейные алгебраические группы, алгебры Хопфа
3. Теория Пикара – Вессио, разрешимость ОДУ в лиувиллевых функциях
4. Категории Таннаки, соответствующая интерпретация дифференциальной теории Галуа
5. ОДУ над полем рядов Лорана
6. Проблема Римана – Гильберта, монодромия и дифференциальные группы Галуа
7. Феномен Стокса, матрицы Стокса
8. Обратная задача дифференциальной теории Галуа
9. Эффекты в положительной характеристике

УЧЕБНИКИ:

1. M. van der Put and M. F. Singer, Differential Galois Theory, https://singer.math.ncsu.edu/papers/dbook.ps
2. И. Капланский, Введение в дифференциальную алгебру, М.: «Иностранная литература», 1959.
3. E. R. Kolchin, Differential algebra and algebraic groups, Pure and Applied Mathematics, Vol. 54. Academic Press, New York-London, 1973.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: В течение семестра слушателям будут даваться задачи на дом, решение которых можно будет сдавать в письменной форме. В конце семестра будет устный экзамен, включающий теоретические вопросы и задачи. При выставлении итоговой оценки будут учитываться решённые задачи в течение семестра и оценка за экзамен (при этом может оказаться, что решённых в течение семестра задач уже достаточно для получения высшего балла).

Дополнительные главы алгебры
учебная дисциплина для студентов 2-го курса и старше

ЛЕКТОР: Л. Г. Рыбников.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2018/19 уч. г., две пары в неделю, 6 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: Курс задуман как продолжение стандартного трёхсеместрового курса алгебры, читаемого на факультете математики. Он включает в себя элементарное введение в коммутативную алгебру (вплоть до теорем Гильберта о базисе, об инвариантах и о нулях) и элементарное введение в некоммутативную алгебру (в основном теорему плотности и ее следствия в теории представлений конечных групп). Формат: лекция + семинар каждую неделю.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: стандартный курс алгебры.

ПРОГРАММА:

- Кольца главных идеалов. Факториальные кольца. Поле частных. Лемма Гаусса. Признак Эйзенштейна.
- Результант и дискриминант. Теорема Безу для кривых.
- Модули над кольцами: определение и примеры. Теоремы Жордана – Гельдера и Крулля – Шмидта. Теорема о модулях над кольцами главных идеалов и ее приложения.
- Целые расширения колец. Целозамкнутость. Кольца целых алгебраических расширений. Целые алгебраические числа.
- Нетеровы кольца. Теорема Гильберта о базисе.
- Теорема Гильберта об инвариантах (для конечной группы). Теорема о симметрических многочленах.
- Теорема Гильберта о нулях
- Алгебры над полем и модули над ними. Примеры. Лемма Шура.
- Полупростые алгебры. Теорема плотности и ее следствия. Структура полупростой алгебры над полем.
- Представления конечных групп. Теорема Машке. Ортогональность характеров.
- Индуцированные представления. Двойственность Фробениуса
- Представления симметрической группы. Двойственность Шура – Вейля.

УЧЕБНИКИ:

1. С. Ленг, «Алгебра»
2. Б. Л. Ван-дер-Варден, «Алгебра».

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: итоговая оценка складывается из среднего балла за письменные контрольные работы (с весом 0.2), письменные домашние задания (с весом 0.2), коллоквиума в конце 3-го модуля (с весом 0.2) и устного экзамена в конце семестра (с весом 0.4). Альтернативным способом получения итоговой оценки 10 баллов является сдача всех задач из листка повышенной сложности (задачи сдаются устно лектору).

КОММЕНТАРИЙ: Курс читался весной 2019 года, материалы см. на
https://math.hse.ru/add_chapt_algebra1819

Избранные главы дискретной математики
НИС для студентов 1-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛЬ: И. В. Артамкин.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2018/19 уч. г., одна пара в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Под дискретной математикой в нашей стране обычно понимают собрание разрозненных математических сюжетов, оказавшихся полезными в информатике или смежных прикладных областях. Некоторые из этих сюжетов входят в обязательные курсы математической логики и дискретной математики, читаемые в бакалавриате. На нашем семинаре обсуждаются не вошедшие в эти курсы конструкции, имеющие, тем не менее, заметное значение как в математике, так и в приложениях.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: нет.

ПРОГРАММА:

- Булевы функции и теорема Поста о функциональной полноте. Эта теорема даёт эффективный ответ на следующий вопрос: можно ли любую булеву функцию (от любого числа переменных) выразить с помощью операции композиции через заданный набор функций. Удивительно, что на такой вопрос имеется простой и содержательный ответ, позволяющий, например, придумать функцию от двух переменных, через которую можно выразить любую функцию.

- Конечные поля. Теорема о том, что мультипликативная группа конечного поля является циклической, позволяет строить длинные периодические последовательности, повсеместно используемые в радиолокации, системах опознавания «свой-чужой» и т.д.

- Теорема Форда – Фалкерсона о максимальном потоке в транспортной сети. Речь идет о такой задаче: имеется некоторая сеть дорог (трубопроводов), соединяющих пункты А и Б. У каждой дороги (трубы) есть своя максимальная пропускная способность — наибольшее число автомобилей (баррелей нефти) которые могут пройти по этой дороге (трубе) за час. Требуется организовать движение (перекачку нефти) таким образом, чтобы общее число автомобилей (баррелей нефти), попадающее за час из А в Б, было максимально возможным. Оказывается, многие важные результаты и алгоритмы теории графов, как прикладные, так и чисто математические, связаны с этим кругом идей.

УЧЕБНИКИ:

1. Ф. Харири. Теория графов. М.: УРСС, 2003.
2. В. В. Белов, Е. М. Воробьев, В. Е. Шаталов. Теория графов. М.: Высш. школа, 1976.
3. М. Свами, К. Тхулалираман. Графы, сети и алгоритмы. М: Мир, 1984.
4. А. И. Кострикин. Основы алгебры.
5. Барти, Биркгоф. Современная прикладная алгебра. М. 1976.
6. А. И. Сирота, Ю. И. Худак. Основы дискретной математики. Ч. 1. М. 2010.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Итоговая оценка совпадает с накопленной. Основу накопленной оценки составляет индивидуальное письменное домашнее задание, оцениваемое от 0 до 7; оценка 6 или 7 за вовремя сданное задание может быть повышена за счет дополнительных баллов, начисляемых за рассказ решений задач на семинаре (от 0,5 до 1 балла за задачу в зависимости от ее сложности) и за аудиторную контрольную работу.

Избранные главы математической экономики
НИС для студентов 3-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛЬ: М. И. Левин.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2018/19 уч. г., две пары в неделю, 6 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: Курс ориентирован на студентов 3–4 курса бакалавриата, студентов магистратуры и аспирантов, а также всех интересующихся современными проблемами экономической теории и применением математических моделей для исследования социально-экономических систем. Предполагается ознакомить студентов с основными концепциями современной экономической теории и обсудить актуальные вопросы конструирования и использования математических моделей для принятия экономических и политических, индивидуальных и коллективных решений в условиях ограниченной рациональности, асимметрии информации и рентоориентированного поведения. Наряду с теоретическими моделями будут рассмотрены прикладные социально-экономические модели и элементы поведенческой и цифровой экономик. Одна из задач курса — научить пользоваться математическим инструментарием для разработки и исследования социально-экономических и политэкономических явлений. Курс основывается на современных исследованиях, в том числе, на работах лектора.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: базовые курсы первых двух лет бакалавриата.

ПРОГРАММА:

- Введение в науку экономику. «Экономика — это интересно!». Примеры экономических «парадоксов», иллюзий и ошибочных решений.
- Модели экономического равновесия и неравновесия. Экономика дефицита, очередей и привилегий.
- Элементы теории игр. Ассимметричная и неполная информация.
- Неопределенность и риск. Равновесие на финансовых рынках.
- Экономика общественного сектора, семьи и «сект».
- Теневые рынки, «экономика джунглей», модели аддиктивного поведения.
- Математические модели экономики коррупции и борьбы за ренту.
- Экономика институтов. Нормы, традиции и мораль.
- Модели международной торговли и международной политики.
- Эволюционная экономика. Диффузия инноваций и «созидательное разрушение».
- Модели экономического роста и развития.
- Экономика знаний и интернет-экономика.

УЧЕБНИКИ:

1. А. Мас–Коллелл, М. Уинстон, Дж. Грин. Микроэкономическая теория. М.: Дело, 2016.
2. А. Хилман. Государство и экономическая политика. Возможности и ограничения управления. М.: Изд. Дом ГУ ВШЭ, 2009.

3. М. И. Левин, В.Л. Макаров, А. М. Рубинов. Математические модели экономического взаимодействия. М.: Физматлит, 1993.

А также статьи, актуальные на момент чтения спецкурса.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: форма контроля — реферат, оценивающийся по 10-бальной шкале и по шкале «плохо, удовлетворительно, хорошо, отлично».

Категории и универсальная алгебра
НИС для студентов 2-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛЬ: В. Б. Шехтман.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2018/19 уч. г., одна пара в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Будет дано короткое введение в две обширные области на границе математической логики с информатикой. Теория категорий проявляется во всех областях современной математики; она даёт простой язык для описания сходных явлений. Универсальная алгебра изучает категории абстрактных алгебр и морфизмов; они возникают как в привычном математическом контексте (группы, кольца, модули), так и в логике (решётки, булевы алгебры) и информатике (типы данных, алгебры термов). Занятия будут проходить в форме спецкурса.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: базовые курсы первого года бакалавриата: алгебра, анализ, топология, логика.

ПРОГРАММА:

- Категории и функторы. Суммы, произведения, пределы. Эквивалентность категорий.
- Морфизм функторов. Представимость, лемма Йонеды. Сопряжённые функторы.
- Алгебры и конгруэнции.
- Многообразия и эквациональные теории. Теорема Биркгофа о многообразиях.
- Переписывание термов. Унификация.
- Решетки и булевы алгебры.

УЧЕБНИКИ:

- С. Маклейн. Категории для работающего математика. М., 2004.
- П. Кон. Универсальная алгебра. М., 1968.
- S. Burris, H. Sankappanavar. A course in universal algebra. Millenium edition, 2012.
- W. Wechler. Universal algebra for computer scientists. Springer, 1992.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Накопленная оценка $=$ (число решённых задач) $\times 10/12$. Если эта оценка не менее 8, она равна итоговой. Иначе: итоговая оценка $=$ (число решённых задач) $\times 0.75 +$ оценка за экзамен $\times 0.5$. Округление до ближайшего целого.

Квантовая теория
учебная дисциплина для студентов 3-го курса и старше

ЛЕКТОР: В. В. Лосяков, А. Г. Семёнов.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2018/19 уч. г., две пары в неделю, 6 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: это продолжение курса «Введение в квантовую теорию».

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: курс «Введение в квантовую теорию».

ПРОГРАММА:

1. Суперсимметричная квантовая механика.
2. Квантование электромагнитного поля с классическим внешним источником.
3. Модель Калдейры – Легетта.
4. Зонная структура одномерных систем.
5. Квантовая информатика.

УЧЕБНИКИ:

1. G. Junker, Supersymmetric Methods in Quantum and Statistical Physics, Springer-Verlag, Berlin, 1996
2. А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев, Введение в квантовую теорию калибровочных полей, М.Наука,1988
3. Weiss, Quantum Dissipative Systems (1992), World Scientific.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: оценка выставляется по результатам трёх письменных контрольных работ и одного коллоквиума.

Квантовая теория поля
НИС для студентов 3-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛЬ: А. Г. Семёнов.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2018/19 уч. г., две пары в неделю, 6 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: В настоящее время квантовая теория поля является основным средством описания явлений происходящих в микромире: взаимодействия элементарных частиц, строение адронов и т. п. Её методы широко используются и в других областях теоретической физики: конденсированное состояние вещества, статистическая механика, теория турбулентности и др. Помимо этого, квантовая теория поля служит важнейшим стимулом для развития множества современных математических исследований. Курс посвящён изучению основных идей и методов квантовой теории поля, а также обсуждению применения её подходов к различным областям современной теоретической и математической физики. Будет рассказано о квантовании скалярных и калибровочный теорий, методе функционального интегрирования, построении теории возмущений и диаграммах Фейнмана, $(1 + 1)$-мерных точно решаемых теориях, а так же о применении этих подходов в различных областях современной науки.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Гамильтонова механика, Уравнения с частными производными, Группы и алгебры Ли, Классическая теория поля, Квантовая механика.

ПРОГРАММА:

- Теория поля, симметрии, физические реализации.
- Скалярное поле и его квантование (операторный подход).
- Наблюдаемые и S-матрица.
- Метод функционального интегрирования.
- Ряд теории возмущений и построение Фейнмановских диаграмм.
- Калибровочные поля и особенности их квантования.
- Абелевы и неабелевы теории, трюк Фаддеева – Попова.
- Фермионы в квантовой теории поля.
- Бесконечности в квантовой теории поля и методы работы с ними.
- Физические эффекты в КЭД и модельных системах.
- $(1 + 1)$-мерные системы.
- Применение методов квантовой теории поля в смежных областях.
- Интересные непертурбативные явления в модельных системах (при наличии времени).

УЧЕБНИКИ:

1. М. Пескин, Д. Шредер. Введение в квантовую теорию поля. Ижевск: РХД, 2001.
2. K. Huang. Quantum Field Theory. WILLEY-VCH, 2010.
3. A. M. Tsvelik. Quantum Filed Theory in Condensed Matter Physics. CUP, 2003.

КОММЕНТАРИЙ: Детальное содержание курса будет варьироваться от состава и уровня слушателей.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: оценка равна $0.4\,H + 0.6\,E$, где H — средняя оценка по всем домашним контрольным в семестре, а E — оценка за экзамен. Округление в меньшую сторону, но на экзамене есть возможность для повышения оценки путём обсуждения и решения задач.

Классическая теория поля
учебная дисциплина для студентов 3-го курса и старше

ЛЕКТОР: П. И. Дунин–Барковский.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2018/19 уч. г., две пары в неделю, 6 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: Классическая теория поля является одним из краеугольных камней теоретической физики, и при этом включает в себя многие интересные математические идеи. Все потенциальные слушатели уже и так в той или иной степени знакомы с одним из примеров теории поля – теорией электромагнитного поля (которая и будет основной целью обсуждений в рамках данного курса). Теория поля изучает системы с бесконечным (условно говоря, континуальным) числом степеней свободы: у поля есть динамически меняющееся значение в каждой точке пространства.

В данном курсе будут напомнены математические формулировки основных необходимых физических принципов; будет дано краткое введение в специальную теорию относительности (описывающую пространство-время, в котором живет электромагнитное поле). Целью курса, в частности, является обсуждение того, как получать в явном виде конкретные уравнения, позволяющие описывать реальные явления в физическом мире, связанные с поведением электромагнитного поля.

При этом также будут обсуждаться интересные абстрактные математические конструкции. Например, будет обсуждаться теория Янга – Миллса, частным случаем которой является теория электромагнитного поля. Теория Янга – Миллса формулируется в терминах связностей на главных расслоениях (грубо говоря, расслоениях, на которых действуют группы Ли). При этом электродинамика соответствует группе U(1) (то есть, группе поворотов окружности). К слову, поля, соответствующие двум из трех оставшихся фундаментальных взаимодействия в природе (сильному и слабому) тоже описываются теориями Янга – Миллса, только для других групп Ли (правда, на обсуждение сильного и слабого взаимодействий в рамках данного курса уже не хватит времени). В рамках курса будут напомнены все необходимые базовые сведения про группы Ли и главные расслоения, желательно только общее знакомство с гладкими многообразиями.

Курс настоятельно рекомендуется тем, кто учится или планирует учиться по направлению «Математика и математическая физика», но также рекомендуется и всем остальным, кого интересуют упомянутые выше (а также ниже в программе курса) математические и физические вопросы.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: семестровый курс «Механика» для 2-го года бакалавриата, курс «Многообразия» 2-го года бакалавриата, курс «Дифференциальные уравнения» 2-го года бакалавриата. Также желательно знакомство с основами теории групп и алгебр Ли и их представлений. На лекциях будет дано краткое напоминание нужных фактов.

ПРОГРАММА:

1. Лагранжева формулировка классической механики (напоминание): принцип наименьшего действия, первая теорема Нётер, законы сохранения и группы симметрии механической системы.

2. Основы специальной теории относительности: принцип относительности Эйнштейна, пространство Минковского, группы и алгебры Лоренца и Пуанкаре. Свободная релятивистская частица. Действие и симметрии релятивистской струны.

3. Предельный переход от механической к полевой системе. Скалярное вещественное поле. Общее решение уравнения Клейна–Гордона.

4. Принцип наименьшего действия в полевых моделях, первая теорема Нётер, сохраняющиеся токи и заряды. Тензор энергии-импульса скалярного поля.

5. Общая теория Янга – Миллса, связность в главном расслоениии, кривизна связности.
6. Свободное электромагнитное поле как пример абелевой теории Янга – Миллса. 4-вектор потенциала и тензор напряжённости, уравнения Максвелла. Калибровочная инвариантность. Кулоновская калибровка. Плоские волны.
7. Релятивистская частица во внешнем электромагнитном поле: уравнения движения, сила Лоренца. Уравнения движения электромагнитного поля в присутствии зарядов и токов.
8. Закон сохранения энергии в электродинамике. Плотность энергии и плотности потока энергии электромагнитного поля, вектор Пойнтинга. Тензор энергии-импульса электромагнитного поля.
9. Запаздывающая функция Грина волнового уравнения, потенциалы Лиенара-–Вихерта точечного заряда и соответствующие напряжённости полей. Электрическое дипольное излучение, угловое и частотное распределение его интенсивности.

УЧЕБНИКИ:

- Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, «Курс теоретической физики. Теория поля», т.2, Москва, Наука, 1988.
- Дж. Джексон, «Классическая электродинамика», Москва, Мир, 1965.
- Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс, «Электродинамика. Фейнмановские лекции по физике», т.6, Москва, Мир, 1977.
- G. Giachetta, Luigi Mangiarotti, G. Sardanashvily «Advanced classical field theory», Singapore, World Scientific Publishing, 2009.
- В.С. Владимиров, «Обобщеные функции в математической физике», Москва, Наука, 1979.
- В.С. Владимиров, «Уравнения математической физики», Москва, Наука, 1981.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Оценивание основывается на следующих четырех оценках:

- $S \in [0,5]$ – оценка за сдачу листков, вещественное число между 0 и 5,
- $C \in [0,5]$ – оценка за самостоятельные работы на семинарах (проводимые раз в несколько занятий), вещественное число между 0 и 5,
- $E \in [0,5]$ – оценка за устный экзамен, вещественное число между 0 и 5.

Полная оценка вычисляется по следующей формуле:

$$\min(10, \lceil S + C + E \rceil),$$

где $\lceil\rceil$ соответствует округлению вверх. Если для какого-то студента до финального экзамена выполняется условие $\min(10, \lceil S + C \rceil \geq 8$, то данный студент может получить эту оценку автоматом и не идти на экзамен.

КОММЕНТАРИЙ: Никаких специальных знаний по физике от слушателей курса не потребуется.

Комплексная геометрия
учебная дисциплина для студентов 3-го курса и старше

ЛЕКТОР: А. В. Пенской.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2018/19 уч. г., две пары в неделю, 6 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: Комплексная геометрия — весьма актуальный и активно развивающийся раздел геометрии, изучающий комплексно аналитические многообразия и голоморфные векторные расслоения на них. Будучи тесно связанной с дифференциальной и алгебраической геометрией, алгебраической топологией, геометрическим анализом и современной математической физикой, комплексная геометрия является красивой и привлекательной областью в самом центре современной математики. Предлагаемый курс послужит фундаментом для дальнейшего самостоятельного изучения предмета по предлагаемой литературе.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: три года бакалавриата (гладкие многообразия, дифференциальная геометрия, комплексный анализ одной переменной, алгебраическая топология)

ПРОГРАММА:

- Основы теории функций нескольких комплексных переменных
- Пучки и их когомологии
- Области в $\mathbb{C}^n$: дифференциальные формы, комплексные и эрмитовы структуры.
- Комплексные многообразия, голоморфные векторные расслоения, линейные расслоения и дивизоры, раздутия, элементы дифференциальной геометрии.
- Кэлеровы многообразия, теория Ходжа, теоремы Лефшеца.
- Дифференциальная геометрия: эрмитовы векторные расслоения, двойственность Серра, связности, кривизна, классы Чженя, голономия.
- Теоремы Хирцебруха – Римана – Роха и Кодаиры.
- Деформации комплексных структур.

УЧЕБНИКИ:

- D. Huybrechts, Complex Geometry — An Introduction
- П. Гриффитс, Дж. Харрис, Принципы алгебраической геометрии, в 2-х томах.
- К. Вуазен, Теория Ходжа и комплексная алгебраическая геометрия, в 2-х томах.
- А. Бессе, Многообразия Эйнштейна, в 2-х томах.
- Р. Уэллс, Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: итоговая оценка равна среднему арифметическому накопленной оценки и оценки за экзамен. Накопленная оценка вычисляется по формуле $0,4$ (работа на семинарах) $+$ $0,6$ (самостоятельное решение задач из листков). Все округления производятся по стандартным правилам.

КОММЕНТАРИЙ: В качестве основного учебника планируется книга Хёйбрехтса, являющаяся расширенным изложением годового курса лекций, прочитанного им в Университете Кёльна. Мы надеемся изучить её за один семестр при двух занятиях в неделю, предложив часть материала в виде задач для самостоятельного решения.

Линейное программирование
НИС для студентов 2-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛЬ: А. В. Колесников.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2018/19 уч. г., две пары в неделю, 6 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: Линейное программирование — раздел теории оптимизации, изучающих специальный класс задач — нахождение экстремумов линейных функций на выпуклых множествах (как конечномерных, так и бесконечномерных). Линейное программирование зародилось как прикладная дисциплина, с приложениями (в первую очередь) к экономике, но оно имеет глубокие связи со многими задачами анализа, геометрии, дискретной математики, а также численными методами и алгоритмами. Настоящий курс представляет собой введение в линейное программирование и ставит своей целью осветить многообразие связей и приложений линейного программирования.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: математический анализ и линейная алгебра в объёме первого курса

ПРОГРАММА:

1. Линейное программирование. Постановка задачи и базовые свойства.
2. Классические задачи линейного программирования (задача о диете, транспортная задача и др.).
3. Элементы выпуклого анализа. Теорема Каратеодори, теорема об отделимости.
4. Выпуклые многогранники. Крайние точки. Теорема Бирхгофа о бистохастических матрицах.
5. Теорема о минимаксе.
6. Двойственность в линейном программировании.
7. Другие приложения минимакса. Двудольные графы (теоремы Кёнига, Холла). Игры с нулевой суммой.
8. Симплекс-метод.
9. Другие алгоритмы (обзорно).
10. Транспортные потоки в сетях. Теорема Форда – Фалькерсона.
11. Целочисленное линейное программирование.
12. Общая теорема о минимаксе*.
13. Непрерывная транспортная задача*. Метрика Канторовича – Рубинштейна*.

УЧЕБНИКИ: Основные учебники:

1. Evar D. Nering and Albert W. Tucker[1]. Linear Programs and Related Problems. (1993).
2. Robert J. Vanderbei. Linear Programming. Foundations and Extensions. (2001).
3. Пападимитроу Х., Стайглиц К., Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. 1982.

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Albert_W._Tucker

Дополнительное чтение

1. Lovasz L., Plummer M., Matching theory. (1985)
2. Villani C., Topics in optimal transportation (2003).
3. Циглер Г., Выпуклые многогранники. МЦНМО (2014).

КОММЕНТАРИЙ: Для понимания некоторых (немногих) сюжетов курса желательно (но необязательно) знакомство с функциональным анализом.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: В течение семестра студентам предлагается решать задачи из четырех листков. Экзамен состоит из двухчасовой контрольной работы с пятью задачами (по 2 балла за каждую). Окончательная оценка вычисляется по следующей формуле $E \cdot 0.4 + H \cdot 0.06$, где — оценка за письменный экзамен (по 10-балльной шкале), а H — процент правильно решённых задач в течение семестра (округленный в сторону увеличения до числа, делящегося на 10). Для студентов, посещавших лекции в течение семестра, округление итоговой оценки производится в большую сторону, для посетивших менее половины лекций — в меньшую.

Математика для прагматика
учебная дисциплина для студентов 3-го курса и старше

ЛЕКТОР: А. В. Хохлов.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2018/19 уч. г., две пары в неделю, 6 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: «В бытовом смысле прагматик — это человек, который выстраивает свою систему взглядов на жизнь в аспекте получения практически полезных результатов» (*из Википедии*)

Практическое использование математических конструкций неизбежно связано с конечностью и дискретностью, в то время как изучение Математики во многом опирается на описания непрерывных объектов; полезно знать, как именно реализуются некоторые непрерывные конструкции на практике. Например, появление цифровых стандартов привело к тому, что обработка непрерывных во времени сигналов стала типовой задачей для программистов. В курсе будут рассмотрены примеры распространённых математических моделей в их дискретных и непрерывных вариантах, соответствие формул и взаимосвязь эффектов, характерных для каждого варианта. Примеры будут объединены в несколько отдельных сюжетов, предполагается, что для большинства примеров будут просчитаны визуальные интерпретации.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: предполагается знакомство со стандартными вводными курсами анализа, алгебры, теории вероятностей и обыкновенных дифференциальных уравнений; желательны элементарные навыки работы с `python` или `Matlab` (или иным интерпретатором формул).

ПРОГРАММА:

СЮЖЕТ ПЕРВЫЙ: дифференциирование

- Цифровая регистрация, импульсный базис и описания в нём искажений сигнала в слоистых средах (акустическое зондирование).
- Оператор сдвига и его конечномерная модель, дифференцирование в дискретном времени и круговые частоты.
- Формула замены координат от частотного базиса к импульсному и преобразование Фурье.
- Предельные переходы, альясинг и связь с привычными из анализа формулами Фурье.
- Частотные фильтры и их практическое построение (на уровне программного кода).
- Теорема отсчетов Котельникова – Шеннона.
- Некоторые обобщения: двойственность Понтрягина, случай линейных дифференциальных операторов и примеры из уравнений математической физики.
- Быстрое преобразование Фурье и его версии для различных простых делителей. Некоторые идеи для некоммутативных групп и роль симметрий.
- (Если будет время и интерес) Сигнал и шум, проблема отделения помех и теорема Шеннона. Томография, преобразование Радона и связь с преобразованием Фурье. Статья Теренса Тао, получившая более, чем четырнадцать тысяч цитирований, и её смысл.

СЮЖЕТ ВТОРОЙ: интегрирование

- Усреднение по множествам сигналов и интегрирование по множеству непрерывных функций на отрезке. Мера Винера и ее носители.
- Практические модели естествознания, приводящие к интегрированию по функциональным пространствам.

- Свойства броуновских траекторий и примеры явных аналитических вычислений интегралов по броуновским траекториям. Связь интеграла по броуновским траекториям и интеграла Фейнмана.
- (Если будет время и интерес) Траектории случайного блуждания по решеткам размерностей 2, 3 и больше, ключевые отличия от одномерного случая. Связь с уравнениями математической физики.

СЮЖЕТ ТРЕТИЙ: стохастический мир

- (при необходимости) Обзор некоторых методов вычислений в теории вероятностей — моменты, асимптотики, свойства смесей и т. п.
- Практические вычисления в стохастическом мире и что собственно можно проверить статистикой?
- Модели классической механики и марковские модели. Винеровский процесс и физическое броуновское движение.
- Стохастические уравнения, уравнение Ито и лемма Ито. Вычисления компьютерные и аналитические.
- Широкоупотребимые стохастические модели и представление их решений. Диффузионные уравнения. Порождающий процесс Винера.
- Стохастические интегралы и отличительная специфика формул стохастического мира от формул математического анализа.

УЧЕБНИКИ: Примеры заимствованы из множества предметно-специализированных книг, статей и монографий — прочтение любого из источников вовсе не требуется. Основные идеи изложений взяты из

1. W. Press, S. Teukolsky, W. Vetterlink, B. Flannery. «Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing»
2. Р. Блейхут. «Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов»
3. A. Oppenheim, R. Shaefer. «Discrete-Time Signal Processing»
4. G. Johnson, M. Lapidus. «The Feynman Integral and Feynman's Operational Calculus»
5. С. Степанов. «Стохастический мир», https://www.twirpx.com/file/2483780/

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 50% за решение домашних задач и 50% за итоговый экзамен, все округления происходят по стандартным правилам (до ближайшего целого, полуцелые округляются вверх).

КОММЕНТАРИЙ: Курс задуман для расширения кругозора в областях применения математических моделей.

Математика процессов в ранней вселенной
НИС для студентов 3-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛЬ: К. П. Зыбин.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2018/19 уч. г., одна пара в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: В курсе предполагается изложить современное состояние знаний о Вселенной. Будет обсуждаться: динамика «темной материи», приводящая к возникновению нелинейных структур, будет изложена теория инфляции вселенной, рассмотрена теория генерации спектра первичных флуктуаций.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: математический анализ, дифференциальные уравнения, ТФКП.

ПРОГРАММА:

1. Однородная и изотропная вселенная
2. Горячая вселенная, краткая тепловая история.
3. Процессы образования первичного состава химических элементов
4. Неоднородности во вселенной, теория гравитационной неустойчивости
5. Теория инфляции
6. Возникновение первичных флуктуаций

УЧЕБНИКИ:
V. Mukhanov. Physical Foundations of Cosmology. Cambridge, http://www.cambridge.org/9780521563987.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 0.5 (доклад + работа на семинаре) + 0.5 (экзамен), округляется до ближайшего целого, полуцелые значения округляются вверх.

Математика физических явлений
НИС для студентов 1-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛЬ: П. И. Арсеев.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2018/19 уч. г., одна пара в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Курс о связи реальных физических явлений и математических методов их описания, о возникновении определенных математических структур из законов физики, в первую очередь в механике, электростатике, электродинамике. В курсе обсуждаются такие вещи, как связь второго закона Ньютона с Лагранжевым формализмом, движение «по прямой» по криволинейной поверхности, поведение гироскопа, эквивалентность закона Кулона теореме Гаусса и т.д

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: желательно знание основ матанализа и понимание простых дифференциальных уравнений. Занятия рассчитаны скорее на студентов 2 – 3 курсов бакалавриата, но и подготовленные первокурсники не должны встретить серьёзных трудностей.

ПРОГРАММА:

1. Механика
   - Второй закон Ньютона-основа описания классического движения. Примеры динамики. Законы сохранения из уравнений движения.
   - От законов Ньютона к лагранжевой формулировке. Принцип наименьшего действия. Законы сохранения с точки зрения лагранжевого подхода.
   - «Свободное» движение в криволинейном пространстве. Движение по сфере и поверхностям вращения. Описание с помощью метрики.
   - Движение быстро вращающихся тел. Нетривиальность их свободного движения. «Антиинтуитивное» поведение гироскопа.
2. Электростатика
   - Закон Кулона как прямое следствие эксперимента. Понятие потока векторного поля. Эквивалентность теоремы Гаусса «экспериментальной» формулировке закона Кулона. Дивергенция векторного поля , дифференциальная формулировка закона Кулона. Уравнения Лапласа и Пуассона.
   - Решение задач электростатики с помощью теоремы Гаусса. Поле заряженных плоскостей и стержней. Понятие о двумерной и одномерной электростатике и специфических «законах Кулона». Заряды над поверхностью металла.
   - Электрическое поле в диэлектриках. Поверхностные заряды и граничные условия для электрического поля в неоднородной системе. Метод зарядов изображений — физическое решение задачи о нахождении решения дифференциального уравнения с граничными условиями.
3. Электродинамика
   - Взаимодействие токов. Экспериментальные законы Эрстеда и Ампера. Сила, действующая на ток в магнитном поле. Сила Лоренца. Движение частицы в магнитном поле.
   - Понятие векторного потенциала. Ротор векторного поля, формула Стокса. Свойства векторного потенциала, сравнение со скалярным потенциалом. Дифференциальная формулировка законов электромагнетизма при условии стационарности токов.
   - Лагранжиан частицы, взаимодействующей с электромагнитным полем.

- Закон Фарадея, его интегральная и дифференциальная формулировки. Система уравнений Максвелла. Еще раз их физический смысл и математическая формулировка. Полный Лагранжиан электромагнитного поля — возможность вывода уравнений электродинамики из новых принципов.
- Уравнения электромагнитных волн из уравнений Максвелла. Электромагнитные волны в среде. Граничные условия на поверхности раздела двух сред.
- Отражение от поверхности раздела двух сред. Два метода решения задачи об отражении от плоскопараллельной пластины. Поверхностные волны
- Волноводы и резонаторы. Дискретные частоты собственных колебаний — путь к описанию полей как набора осцилляторов.

УЧЕБНИКИ:

1. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике — М.: Мир, 1967
2. Арнольд В. И. Математические методы классической механики — М.: Физматлит, 1974
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика — М.: Физматлит, 2004
4. Тамм И. Е. Основы теории электричества — М.: Гос. изд. технико-теоретической литературы, 1956
5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977

КОММЕНТАРИЙ:

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: студенты сдают задачи по двум спискам и отвечают на дополнительные вопросы. Начисление баллов следующее:

- N_1, от 0 до 10, за сданные в третьем модуле задачи
- Q_1, от 0 до 5, за ответы на дополнительные вопросы в третьем модуле
- N_2, от 0 до 10, за сданные в четвёртом модуле задачи
- Q_2, от 0 до 5, за ответы на дополнительные вопросы в четвёртом модуле
- W, от 0 до 5, за работу на занятиях.

Итоговая оценка $S = (N_1 + N_2 + Q_1 + Q_2 + W)/3$. Округление по стандартным правилам.

МАШИННОЕ ОБУЧЕНИЕ
учебная дисциплина для студентов 3-го курса и старше

ЛЕКТОР: И. В. Щуров.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2018/19 уч. г., две пары в неделю, 6 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: В 2019 году найдётся мало людей, которые бы не слышали о машинном обучении, но тех, кто понимает, что это такое, гораздо меньше. Машинное обучение используется в тех случаях, когда вам нужно научиться решать какой-то класс задач, для которого трудно написать явный алгоритм решения, но при этом можно найти множество примеров с правильными ответами. Так, невозможно представить себе написанный вручную алгоритм, который был бы способен отличить фотографию кошки от фотографии собаки, но если у вас есть достаточное количество фотографий тех и других, вы можете использовать машинное обучение, чтобы построить такой алгоритм автоматически.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: линейная алгебра, математический анализ (одномерный и многомерный), теория вероятностей — слушателей не должны пугать слова «гиперплоскость», «градиент», «плотность вероятности» и «ковариационная матрица». Мы также будем программировать — основным языком на курсе будет `Python 3`, желательно знать библиотеки `numpy` и `pandas`.

ПРОГРАММА: В курсе мы будем обсуждать разные методы машинного обучения — начиная с линейных регрессий и деревьев решений и заканчивая современными нейросетевыми архитектурами. Мы начнём с теоретической основы каждого метода, посмотрим, как он работает на простых примерах, а затем перейдём к практической работе с реальными данными.

1. Обзор задач машинного обучения. Постановка задачи «обучения с учителем» (supervised learning). Метод k ближайших соседей. Проблема переобучения. Проклятие размерности.
2. Регрессии и классификаторы. Линейные модели. Регуляризация.
3. Методы оптимизации. Градиентный спуск и его модификации.
4. Решающие деревья. Бутстрап и бэггинг. Случайные леса. Градиентный бустинг.
5. Метод опорных векторов.
6. Нейронные сети и глубокое обучение.
7. Задачи «обучения без учителя» (unsupervised learning): оценка плотности, кластеризация, снижение размерности. Semi-supervised learning.
8. Другие задачи машинного обучения.

УЧЕБНИКИ:

- Hastie T., Tibshirani R, Friedman J. The Elements of Statistical Learning (2nd edition). Springer, 2009.
- Murphy K. Machine Learning: A Probabilistic Perspective. MIT Press, 2012.
- Ian Goodfellow, Yoshua Bengio and Aaron Courville. Deep Learning. MIT Press, 2016.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Итоговая оценка вычисляется как средневзвешенное от оценки за текущую работу (40%), оценки за контрольную работу (30%) и оценки за экзамен (30%). Оценка за текущую работу формируется как среднее оценок за домашние задания и другие формы текущего контроля. В число домашних заданий могут быть включены соревнования по машинному обучению. Итоговая оценка округляется арифметически, остальные оценки не округляются.

КОММЕНТАРИЙ: Вы можете посмотреть на страницу курса 2018–19 учебного года: http://wiki.cs.hse.ru/?curid=15880\protect\char”007D\relax.

Методы сбора и анализа социологической информации
учебная дисциплина для студентов 3-го курса и старше

ЛЕКТОР: Д. С. Шмерлинг.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2018/19 уч. г., две пары в неделю, 6 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: Освоение материала курса доставляет статистическую подготовку будущего выпускника к RD (Research and Development) в области социальных и гуманитарных наук и их приложений. Выпускники, научившиеся сбору и обработке данных «социальных и гуманитарных исследований», в наибольшей степени отвечают запросам наиболее престижных работодателей. Предлагаемая учебная дисциплина предназначена для ознакомления бакалавров с основными идеями и понятиями в социологии, при этом делается акцент на применении знаний по специальности «Математика» в социологии, выстраиваются связи между двумя дисциплинами, демонстрируются актуальные задачи в социологии, решаемых комплексным междисциплинарным методом. Представленный выше подход, предусматривающий удачное сочетание социальных и математико-статистических знаний и навыков, к подготовке бакалавров, магистров, аспирантов и других специалистов обеспечивает быстрый профессиональный и карьерный рост.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Основы обществознания, история, философия, линейная алгебра и аналитическая геометрия, математический анализ, теория вероятностей и математическая статистика, дискретная математика

ПРОГРАММА:

1. Математическая статистика в социологии: элементы МС и ИО и моделирования в виде, удобном для применения в социальных науках.
2. Основные понятия и теоретические разделы в социологии.
3. Классические задачи математической статистики в приложении к социальным наукам.
4. Проблема поиска вида распределения.
5. Свободные от распределения методы – непараметрика.
6. Распространенные задачи и методы их решения.
7. Экспертные оценки: математические методы.
8. Дискретные методы в математической статистике и экспертных оценках.
9. Обработка данных экспертных оценок.
10. Качественные методы в социологии.

УЧЕБНИКИ:

1. Тюрин Ю.Н., Макаров А.А., Симонова Г.И. Теория вероятностей, Учебное пособие, М.: МЦМНО, 2009.
2. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. М.: Наука, 1983. Используются необходимые таблицы.
3. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Введение в математическую статистику. М.: ЛКИ, 2010.
4. Хальд А. Математическая статистика с техническими приложениями. Пер. с англ. М.: ИЛ, 1956.

5. Тюрин Ю.Н., Макаров А.А. Анализ данных на компьютере, - М.: МЦНМО, 2016.
6. Холлендер М., Вулф Д. Непараметрические методы статистики. – М.: Финансы и статистика, 1983.
7. Гофман А.Б. Семь лекций по истории социологии. М., 2008. Выборочно по указанию преподавателя.
8. Арон Р. Этапы развития социологической мысли. М.: Прогресс Универс, 1993. Выборочно по указанию преподавателя.
9. Шмерлинг Д.С. и др. Экспертные оценки. Методы и применение. (Обзор) – В кн.: Статистические методы анализа экспертных оценок. Ученые записки по статистике, т. 29. Науч. ред. Ю.Н. Тюрин, А.А. Френкель – М.: «Наука», 1977 – с. 290-382.
10. Берж К. Теория графов и её применения. М.: Издательство иностранной литературы, 1962 г. Основные понятия и определения.
11. Джессен Р. Методы статистических обследований / Пер. с англ.; под ред. и с предисл. Е.М. Четыркина. М.: Финансы и статистика, 1985.
12. Дюркгейм Э. Социология. Ее предмет, метод, предназначение. М., 1995. 3-е изд. – М., 2008. Предисловия ко второму и первому изданиям, Введение, Глава 1.
13. Бикел П., Доксум К. Математическая статистика. Вып. 1. М.: Финансы и статистика, 1983.
14. Себер Дж. Линейный регрессионный анализ. - М.: Мир, 1980.
15. Саати Т., Кернс К. Аналитическое планирование. Организация систем: Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1991.
16. Чеботарев П.Ю. Методы лапласовской теории орграфов в структурном анализе систем: докт. дис. ф-м. н. по специальности 05.13.01 ИПУ РАН. – М., 2008.
17. Ядов В.А. Стратегии и методы качественного анализа данных. Социология: 4М, 1991, №1, с. 14–31.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: итоговая отметка равна

$$0.2\,(\text{домашнее задание} + \text{семинары}) + 0.3\,(\text{эссе}) + 0.5\,(\text{ответ на зачете}),$$

округление вверх.

Оптимизация формы
НИС для студентов 3-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛЬ: **Е. О. Степанов.**

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: **4-й модуль 2018/19 уч. г., два занятия в неделю, 3 кредита.**

ОПИСАНИЕ: Задача курса — познакомить слушателей с наиболее характерными оптимизационными задачами, в которых неизвестным является множество не заданной *a priori* структуры, а также с методами, применяемыми для исследования их решений. К таким задачам относятся, например, задача о минимальной поверхности, аэродинамическая задача Ньютона, задача Штейнера, задачи построения оптимальных транспортных сетей.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: математический и функциональный анализ, дифференциальная геометрия и топология в объеме первых двух-трёх лет бакалавриата.

ПРОГРАММА:

I. Задачи оптимального размещения ресурсов. Постановки задач об оптимальном размещении ресурсов (optimal location problems), k-center problem, k-median problem, задачи оптимальной упаковки и т. п. Гексагональная эвристика. Общая теория Γ-сходимости. Пример вычисления Γ-предельной задачи для одной из задач оптимального размещения ресурсов, предельное распределение ресурсов. Динамическое размещения ресурсов (краткосрочное планирование), сравнение с задачей Какутани деления отрезков.

II. Задача Штейнера. Меры Хаусдорфа. Липшицевы функции. Спрямляемые множества. Формулы площади и коплощади. Теорема Блашке, теорема Голаба и их модификации. Существование решений задачи Штейнера. Основы топологии кривых. Топологические и геометрические свойства штейнеровских сетей. Некоторые явные примеры.

III. Задачи оптимизации одномерных объектов (кривых). Функционалы среднего и максимального расстояний. Задача Монжа – Канторовича об оптимальном переносе массы. Задача об оптимизации транспортной сети. Задача об оптимальном газопроводе наименьшей длины. Существование, топологические и геометрические свойства решений.

IV. Задача Ньютона о теле наименьшего сопротивления. Выпуклые функции. Существование в классе выпуклых форм. Невыпуклые формы. Вид выпуклого тела наименьшего сопротивления.

V. Задача о минимальной поверхности. Функции ограниченной вариации. Периметр. Множества Каччиопполи. Теорема о компактности. Существование множества минимального периметра. Уравнение минимальной поверхности.

VI. Задачи об оптимизации собственных чисел. Собственные числа лапласиана (для задачи Дирихле и для задачи Неймана). Задачи об оптимизации функционалов, зависящих от собственных чисел. Существование решений в специальных классах множеств. Релаксация. Сходимость по Mosco функциональных пространств. Существование решений ослабленной задачи.

VII. Задача о максимальной жёсткости пластины. Существование решений. Формула монотонности. Регулярность решений. Классификация особых точек.

Темы [IV]–[VII] предлагаются на выбор слушателей (будет выбрана одна или две)

УЧЕБНИКИ:

1. Э. Джусти. Минимальные поверхности и функции ограниченной вариации. М., Мир, 1989.
2. F. Santambrogio. Optimal Transport for Applied Mathematicians. Calculus of Variations, PDEs, and Modeling. Birkhäuser, 2015.
3. G. Allaire. Shape optimization by the homogenization method. Applied Mathematical Sciences 146, Springer Verlag, 2002.
4. M.C. Delfour, J.-P. Zolesio. Shapes and Geometries - Analysis, Differential Calculus, and Optimization. SIAM, 2001.
5. G. Dal Maso. An Introduction to Γ-convergence. Birkhäuser, 1993.
6. А. Арутюнов, Г. Магарил-Ильяев, В. Тихомиров. Принцип максимума Понтрягина. Доказательство и приложения. М., УРСС, 2006.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: оценка выставляется по результатам устного экзамена.

Основные понятия математики
НИС для студентов 1-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛИ: Ю. М. Бурман, С. М. Львовский.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2018/19 уч. г., одна пара в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Это семинар для первокурсников, посвящённый тому, как «работает» математика. Мы будем обсуждать темы из самых разных областей — анализа, геометрии, алгебры, комбинаторики, теории чисел и т.п. Доклад по теме длится одно занятие, в редких случаях — два. Некоторые доклады делают руководители семинара, некоторые — слушатели, некоторые — приглашённые докладчики. Семинар позволит слушателям ещё раз ощутить красоту и разнообразие математики; он также может помочь в выборе темы и руководителя курсовой работы.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: нет.

ПРОГРАММА: Некоторые темы, обсуждаемые на семинаре (это заведомо не полный список, он может варьироваться от года к году):

- Разрезание четырехмерного куба трехмерной пилой: что получится в сечении?
- Квадратичный закон взаимности: квадратные корни по модулю простого числа.
- Как решать кубические уравнения и почему этого никогда не делают.
- Парадокс Банаха – Тарского: разрезание шара на конечное число кусков, из которых можно сложить четыре шара такого же радиуса.
- Теорема Эрроу о диктаторе (невозможность идеальной системы голосования по нескольким кандидатурам) и нестандартный анализ (в котором есть бесконечно малые числа).
- Пентагональное тождество Эйлера.
- Три взаимосвязанных теоремы из топологии: теорема Брауэра о неподвижной точке, основная теорема алгебры и теорема о причесывании ежа.

УЧЕБНИКИ: Р. Курант, Г. Роббинс, «Что такое математика», М., МЦНМО, 2000, http://ilib.mccme.ru/pdf/kurant.pdf. Также по каждой из тем есть своя литература.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: зависит от того, делал ли участник семинара доклад и от результата заключительной контрольной работы. Если участник семинара сделал успешный доклад, то он получает итоговую оценку 10 баллов и не должен писать заключительную контрольную. Если участник семинара доклада не сделал или доклад был очень неудачным, то итоговая оценка за семинар равна оценке за заключительную контрольную.

Основы эконометрики
учебная дисциплина для студентов 3-го курса и старше

ЛЕКТОР: И. Б. Воскобойников.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2018/19 уч. г., две пары в неделю, 6 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: Цель курса — расширение представлений студента-математика о роли математического аппарата теории вероятностей, математической статистики, математической экономики и ряда смежных разделов математики в современных экономических исследованиях. Для этого в курсе будут представлены базовые понятия теории вероятностей и экономической статистики, необходимые для аппарата эконометрики; изложена базовая теория эконометрических методов. Предполагается освоение подходов к решению типовых эконометрических задач, а также выработка практических навыков работы с экономическими данными и интерпретации результатов.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: знание основ теории вероятностей и математической статистики, а также математического анализа и линейной алгебры

ПРОГРАММА: В курсе будут представлены модели классической линейной регрессии, различные методы оценки параметров и их статистические свойства, проверка статистических гипотез и доверительных интервалов для параметров регрессии. Курс также содержит краткое введение в анализ временных рядов и панельных данных, можели с дискретными и смешанными зависимыми переменными.

УЧЕБНИКИ: Hill, R. Carter, W. E Griffiths, и G. C. Lim. Principles of Econometrics. 5-е изд. John Wiley & Sons, 2018.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Оценка складывается из баллов, набранных за промежуточную (15%) и итоговую (50%) контрольные работы, эмпирической домашней работы (30%), а также текущей работы на семинарах с выполнением небольших домашних заданий (5%). Каждый вид работы оценивается количеством баллов от 0 до 100. Итоговая оценка получается как среднее взвешенное с весами, указанными в скобках. Итоговая оценка округляется до ближайшего наибольшего целого числа. Например, итоговый балл 5,01 округляется до 6.

КОММЕНТАРИЙ: Курс предполагает освоение основ работы с эконометрическим пакетом STATA.

Проективная алгебраическая геометрия
НИС для студентов 1-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛЬ: И. В. Артамкин, А. С. Тихомиров.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2018/19 уч. г., одна пара в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: В течение последних полувека алгебраическая геометрия оказалась в фокусе всей современной математики, и за это время развились мощнейшие технические методы, обеспечившие колоссальное продвижение алгебраической геометрии. Это бурное развитие имело и оборотную сторону, поскольку современные абстрактные методы в значительной мере вытеснили из поля зрения прозрачные геометрические основания этой науки. Эти основания по-прежнему остаются основным объектом исследования, источником всех интуиций в алгебраической геометрии, и потому очень важны. Задача семинара — рассказать о геометрических истоках алгебраической геометрии. Поэтому семинар рассчитан как на студентов-младшекурсников, имеющих совсем элементарный начальный уровень, так и на студентов старших курсов, магистрантов и аспирантов, которые уже имеют серьезную техническую базу в алгебраической геометрии (однако, и для них знакомство с наглядными геометрическими картинками несомненно будет полезно).

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: нет

ПРОГРАММА:

1. Задачи, связанные с теоремами Дезарга, Паппа, Паскаля, и др.
2. Задачи евклидоваой и других геометрий: решение средствами проективной геометрии.
3. Теорема Безу, индексы пересечения, правила Цейтена.
4. Поляры, гессианы, принцип двойственности.
5. Линейные ряды, линейные сечения и проекции, раздутия, джойны, мультисеканты, проективные касательные пространства к многообразиям.
6. Поверхности дель Пеццо, нормммногообразия, квадрики.
7. Детерминантали, многообразия Сегре, Веронезе, их многообразия хорд.
8. Грассманианы, многообразия флагов, индукционная процедура построения грассманианов.
9. Многомерные конфигурации прямых.
10. Замыкания Понселе и задачи классификации векторных расслоений.
11. Пространства «полных» квадрик, «полных» треугольников и задачи исчислительной геометрии.

УЧЕБНИКИ:

1. I. V. Dolgachev. Classical algebraic geometry: a modern view. Cambridge, 2011.
2. M. Beltrametti et al. Lectures on Curves, Surfaces and Projective Varieties: A Classical View of Algebraic Geometry. European Math. Soc., Zuerich, 2009.
3. J. G.Semple, J. T. Kneebone. Algebraic projective geometry. Oxford, 1963.
4. J. G. Semple, L. Roth. Introduction to algebraic geometry. Oxford, 1949.

5. Н. А. Глаголев. Проективная геометрия, М., Высшая школа, 1963.
6. Х. С. М. Кокстер. Действительная проективная плоскость. М., Физматгиз, 1959.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 50% за решение домашних задач и 50% за итоговый экзамен, все округления происходят по стандартным правилам (до ближайшего целого, полуцелые округляются вверх).

Римановы поверхности и интегрируемые системы
НИС для студентов 3-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛЬ: С. М. Натанзон.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2018/19 уч. г., две пары в неделю, 6 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: Римановыми поверхностями называются одномерные комплексные многообразия. Особенно важны компактные римановы поверхности, которым и будет посвящена значительная часть курса. Их категория изоморфна категории комплексных алгебраических кривых. С момента своего появления в середине 19 века и по сей день римановы поверхности играют определяющую роль в развитии различных разделов математики, а последние десятилетия и математической физики. С римановых поверхностей начинается алгебраическая геометрия, теория комплексных многообразий, теория пространств постоянной кривизны. Они порождают важные решения интегрируемых систем. Изучение пространства модулей римановых поверхностей является одним из главных направлений современной математики. Важность римановых поверхностей подтверждена также значительным числом филдсовских медалей, полученных за достижение в этой области.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: курс доступен студентам 3 курса и старше.

ПРОГРАММА:

1. Униформизация и модули римановых поверхностей.
2. Алгебраические кривые, билинейные соотношения Римана. Теорема Римана – Роха, точки Вейерштрасса.
3. Абелевы торы, тэта-функции, Теорема Абеля, задача обращения Якоби.
4. Иерархия Кадомцева – Петвиашвилли (КП), функции Бейкера – Ахиезера, алгебро-геометические решения иерархии КП.

УЧЕБНИКИ:

1. Ф. Гриффитс, Дж. Харрис, Принципы алгебраической геометрии, М.: «Мир», 1982.
2. Дж. Спригер, Введение в теорию римановых поверхностей.
3. Комплексный анализ, римановы поверхности и интегрируемые системы, М.: МЦНМО, 2018

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Оценка складывается из оценки работы в течение семестра и оценки за экзамен с весами 0,7 и 0,3 соответственно; округление в пользу студента.

Современные проблемы математической логики
НИС для студентов 3-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛИ: Л. Д. Беклемишев, В. Б. Шехтман, Д. С. Шамканов, А. В. Кудинов, Ю. В. Саватеев.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2018/19 уч. г., одна пара в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Целью семинара является знакомство слушателей с интересными результатами и продвижениями последнего времени в математической логике. Большинство докладов будут обзорными.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: основы логики и теории множеств.

ПРОГРАММА: Доклады на семинаре будут касаться таких тем как модальная логика, теория доказательств, лямбда-исчисление, теория индуктивных определений, семантика компьютерных языков и т.п.

УЧЕБНИКИ: Справочная книга по математической логике. Ред. Дж. Барвайс.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Если студент сделал доклад на семинаре, то он получает 10. В противном случае итоговая оценка совпадает с оценкой за экзамен.

КОММЕНТАРИЙ: Научно-исследовательский семинар рассчитан на студентов второго курса и старше, но в нем также могут принять участия особо заинтересованные первокурсники.

Теория кодирования как введение в алгебру и арифметику
учебная дисциплина для студентов 1-го курса и старше

ЛЕКТОР: В. А. Гриценко.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2018/19 уч. г., две пары в неделю, 6 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: Линейная алгебра и теория многочленов на полем из двух элементов немедленно приводят нас к таким математическим объектам, как конечная плоскость Фано, грассманиан конечномерного пространства, ланграньжиан (ортогональные себе подпространство), расширение поля $\mathbb{F}_2$, простая линейная группа $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)$ из 168 элементов. В данном спецкурсе мы продолжим эту линию изучения современной алгебры и арифметики на примерах базовых вопросов теории кодирования. Эта прикладная теория связана с теорией Галуа конечных полей, теорией характеров, классическими линейными и спорадическими простыми группами. Слушатели познакомимся также с системами корней и их группами Вейля, решетками Нимейера и Лича, дискретным преобразованием Фурье, числами Кэли, матрицами Адамара. Целевая аудитория спецкурса — студенты второго курса и мотивированные студенты первого курса.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Базовые знание по алгебре: конечномерное линейное пространство, кольцо многочленов, факторгруппа, факторкольцо, квадратичная форма.

ПРОГРАММА:

1. Линейные коды и и их дуальные коды как объекты линейной алгебры над конечными полями. Метрика Хэмминга. Соотношения ортогональности.

2. Конечная проективная плоскость Фано и совершенный код Хэмминга. Группа автоморфизмов кода Хэмминга.

3. Целочисленные решетки A_n и D_n и их системы корней. Группа Вейля системы корней. Код Хэмминга и четная унимодулярная решетка E_8.

4. Целочисленные решетки и их конечные дискриминантные группы. Расширения четных целочисленных решеток. Унимодулярные решетки ранга 16 и 24 (решетки Нимейера).

5. Плотные упаковки евклидова пространства шарами.

6. Код Голлея и решетка Лича. Совершенные коды.

7. Конечные поля и неприводимые многочлены на конечными полями. Введение в теорию Галуа конечных полей, автоморфизм Фробениуса. Неприводимые многочлены над конечным полем. Идеалы и циклические коды.

8. Преобразование Фурье на единичном кубе. Коды и теория инвариантов.

УЧЕБНИКИ:

1. W. Ebeling, Lattice and Codes. Vieweg 1994.

2. G. Nebe, E. M. Rains and N. J. A. Sloane, Self-dual codes and invariant theory. Springer-Verlag (2006).

3. J. H. van Lint, Introduction to coding theory, Graduate Texts in Mathematics, Vol.86, Springer-Verlag, New York etc., 1982; second edition 1992.

4. F. J. MacWilliams, N. J. Sloane, The Theory of Error-Correcting Codes. Amsterdam: North-Holland, 1977, (Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А., Теория кодов исправляющих ошибки. М.: Связь, 1979.)
5. J. H. Conway and N. J. A. Sloane, Sphere Packings, Lattices and Groups. New York, NY, USA: Springer-Verlag, 1999. (Конвей Дж., Слоэн Н. Упаковки шаров, решетки и группы. Мир, Том 1, 2, 1990.)

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: среднее арифметическое оценок за работу на семинаре и за теоретический курс. Оценка за семинар складывается из баллов, полученных за возможный устный доклад, выполнение индивидуальной работы, или письменного решения обязательных задач. Оценка за курс формируется из баллов по решению теоретических задач или из оценки за устный коллоквиум в конце курса.

КОММЕНТАРИЙ: Курс является новым. Семинар будет посвящён решению задач и студенческим докладам, связанным с темами курса. Примерные темы докладов: плоскость Фано и алгебра октав, соотношение ортогональности и характеры, закон взаимности и автоморфизм Фробениуса, коды над кольцом $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, матрицы Адамара, группы Матье и код Голлея, конечное преобразование Фурье и т. д. Некоторые темы могут быть расширены до курсовых работ. Темы, связанные, например, с материалом книги Ebeling'a, могут стать основой для начала научно-исследовательской работы.

Теория представлений
НИС для студентов 3-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛЬ: Б. Л. Фейгин, Л. Г. Рыбников.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2018/19 уч. г., одна пара в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Семинар посвящен разбору разных сюжетов из геометрической теории представлений квантовых групп и родственных им алгебр. В числе прочего, планируется обсудить теоретико-представленческие структуры на пространствах модулей пучков на алгебраической поверхности. Простейшим примером такой структуры является структура пространства Фока на когомологиях схемы Гильберта точек на аффинной плоскости. Обобщением этой конструкции являются колчанные многообразия Накаджимы. Также планируется обсудить, насколько возможно, недавние результаты Маулика и Окунькова о квантовых когомологиях колчанных многообразий и их связью с анзацем Бете в магнитных цепочках. Предполагается, что каждый участник семинара какую-то часть программы разберет самостоятельно и расскажет на семинаре.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: стандартные курсы алгебры, групп и алгебр Ли, и топологии

ПРОГРАММА:

1. Эквивариантные когомологии и эквивариантная -теория. Теорема локализации
2. Схема Гильберта и алгебра Гейзенберга.
3. Вертексные алгебры.
4. Схема Гизекера и W-алгебра.
5. Колчанные многообразия и их когомологии
6. Стабильные оболочки и RTT-презентация квантовых групп
7. Остальное зависит от возможностей участников.

УЧЕБНИКИ:

1. Hiraku Nakajima, «Lectures on Hilbert schemes»
2. Davesh Maulik and Andrei Okounkov, «Quantum groups and Quantum cohomology»

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: $0.8\,(\text{участие}) + 0.2\,(\text{доклад})$

Теория пучков
НИС для студентов 3-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛЬ: Н. С. Маркарян.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2018/19 уч. г., одна пара в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Теория пучков является стандартным инструментом изучения локальных объектов на различных многообразиях и получения с их помощью глобальных инвариантов рассматриваемых многообразий. Она является хорошей мотивацией для изучения гомологической алгебры. Мы познакомимся с основными понятиями теории пучков и их когомологий, и постараемся выучить все необходимые для этого определения и теоремы из гомологической алгебры.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: три семестра стандартных курсов алгебры, анализа, геометрии, топологии и спецкурс «Введение в теорию категорий и гомологическую алгебру».

ПРОГРАММА:

- Пучки на топологических пространствах. Слои, этальное пространство предпучка, опучковывание. Прямой и обратный образ. Абелевы пучки.
- Комплексы и гомологии. Длинная точная последовательность и спектральная последовательность. Абелевы категории.
- Глобальные сечения, вялые пучки, резольвента Годемана. Когомологии пучков и гиперкогомологии комплексов пучков. Когомологии Чеха.
- Тонкие и мягкие пучки. Пучок дифференциальных форм на гладком многообразии: лемма Пуанкаре и теорема Де Рама.
- Высшие прямые образы пучков, спектральная последовательность Лере.
- Сечения и когомологии с компактными носителями.
- Когерентные пучки в алгебраической геометрии и их геометрические приложения.
- Категории, функторы, предпучки на категории, лемма Ионеды, сопряжённость и (ко) пределы.
- Топологии Гротендика, пучки на сайтах, теория спуска.

УЧЕБНИКИ:

- B. Fantechi et al, Fundamental algebraic geometry: Grothendieck’s EGA explained, Part 1.
- Р. Хартсхорн, Алгебраическая геометрия.
- B. Iversen, Cohomology of Sheaves, parts I-III.
- C. A. Weibel, An Introduction to Homological Algebra.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 50% за решение домашних задач и 50% за итоговый экзамен, все округления происходят по стандартным правилам (до ближайшего целого, полуцелые округляются вверх).

Тэта функции и модулярные функции
НИС для студентов 2-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛЬ: О. В. Шварцман.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2018/19 уч. г., две пары в неделю, 6 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: Элементарное введение средствами анализа в теорию тэта-функций — замечательный классический аппарат для изучения теории функций на римановых поверхностях (в частности, эллиптических функций). Его главная цель — обсудить на примерах, в чём причины интереса к тэта-функциям со стороны алгебраической геометрии, теории модулярных функций и форм, теории чисел, комбинаторики.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: читаемые на матфаке курсы анализа и геометрии, вводный курс топологии и ТФКП.

ПРОГРАММА:

1. Аналитическая теория: нули тэта-функций, формулы сложения, формулы Якоби.
2. Разложения в бесконечные произведения.
3. Эллиптические функции и тэта-функции.
4. Геометрическая теория: тэта-функции как сечения линейных расслоений на эллиптической кривой, модулярные свойства тэта-функций.
5. Приложения: модулярные формы, комбинаторные тождества.

УЧЕБНИКИ:

1. Уиттекер, Ватсон. Курс современного анализа (том 2, главы 20, 21)
2. Мамфорд. Лекции о тета-функциях

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: итоговая оценка за полугодие равна $0.5\,N{+}0.5\,E$, где E — оценка за итоговый экзамен, а $N = \min(10;\ 0.1\,S + 0.9\,K)$, где S — число семинаров, которые Вы посетили, а K — оценка за контрольную. Все округления происходят до ближайшего целого числа.

Уравнения с частными производными
учебная дисциплина для студентов 3-го курса и старше

ЛЕКТОР: С. В. Шапошников.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2018/19 уч. г., две пары в неделю, 6 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: Огромное число физических, геометрических, вероятностных задач приводят к построению и исследованию решений уравнений с частными производными, причем важнейшую роль в таких исследованиях играют идеи и методы функционального анализа. В настоящем курсе мы не только познакомимся с типичными примерами уравнений и методами их решений, но и обсудим пространства Соболева и теорию полугрупп операторов.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: линейная алгебра и математический анализ

ПРОГРАММА:

1. Уравнения с частными производными в физических, геометрических и вероятностных задачах.
2. Волновое уравнение. Формулы Даламбера, Пуассона и Кирхгофа. Распространение волн.
3. Обобщенные функции и обобщенные производные. Преобразование Фурье. Фундаментальное решение оператора Лапласа, оператора теплопроводности, оператора Даламбера.
4. Пространства Соболева. Неравенства Соболева и теоремы вложения.
5. Теоремы Рисса и Лакса – Мильграма, априорные оценки и продолжение по параметру. Разрешимость краевых задач для эллиптических и параболических уравнений.
6. Принцип максимума для классических и соболевских решений. Альтернатива Фредгольма.
7. Качественные свойства решений эллиптических и параболических уравнений: теоремы о среднем, неравенство Харнака, гёльдеровость соболевских решений, поведение решений на бесконечности.
8. Неограниченные операторы. Задача Штурма – Лиувилля. Расширение по Фридрихсу оператора Лапласа. Теорема Гильберта – Шмидта и обоснование метода Фурье.
9. Полугруппы. Теорема Хилле – Иосиды. Свойства тепловой полугруппы и полугруппы Орнштейна – Уленбека.
10. Нелинейные уравнения. Теоремы о неподвижной точке. Монотонные операторы. Вариационные методы. Разрушение решений.

УЧЕБНИКИ:

1. Krylov N. V. Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Sobolev Spaces. Graduate Series in Mathematics, vol. 96. American Mathematical Society, 2008.
2. Evans L.C. Partial Differential Equations: second edition. Graduate Series in Mathematics, vol. 19.R. American Mathematical Society, 2010.
3. Олейник О. А. Лекции об уравнениях с частными производными. 2-е издание, исправл. и дополн. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005.
4. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1976.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Оценка за курс складывается из накопленной оцени (Н) и оценки за экзамен (Э) по формуле: $0.6\,(\text{Н}) + 0.4\,(\text{Э})$. Накопленная оценка складывается из оценок за две контрольные и коллоквиум по формуле: $0.2\,(\text{кр1} + \text{кр2}) + 0.6\,(\text{коллоквиум})$. Экзамен проходит в устной форме, экзаменационный билет состоит из теоретического вопроса и задачи. Итоговая оценка, оценка за экзамен, накопленная оценка и оценки за контрольные и коллоквиум выставляются по 10-балльной шкале. Округления производятся по стандартному арифметическому правилу.

ФИЛОСОФИЯ
учебная дисциплина для студентов 2-го курса и старше

ЛЕКТОР: А. В. Михайловский.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2018/19 уч. г., две пары в неделю, 6 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: Курс предназначен для всех, кто интересуется историей нововременной европейской мысли и ее культурным контекстом. Цель и задачи курса — ознакомление студентов с ключевыми моментами в развитии европейской философии эпохи Возрождения и Нового времени и их культурным и идейным подтекстом, изучение главных направлений и учений западноевропейской философии этого периода в ее связи с развитием математического естествознания, рассмотрение основных проблемных полей и методологических подходов. В центре внимания — не только метафизика и теория познания Гоббса, Локка, Декарта, Лейбница, Спинозы, Гегеля, но и этико-политическая проблематика — от «Государя» Макиавелли и проектов утопий Мора и Кампанеллы до учений об общественном договоре и концепции «категорического императива» Канта. Основное внимание в рамках семинарских занятий уделяется анализу классических текстов великих западных философов эпохи Возрождения и Нового времени.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: нет.

ПРОГРАММА:

Раздел I. Философия эпохи Возрождения

- **Тема 1.** Методологическое введение.
- **Тема 2.** Культурно-философские особенности эпохи Возрождения.
- **Тема 3.** Антропоцентризм в философии эпохи Возрождения. Тексты для обсуждения на семинаре: Николай Кузанский. Об ученом незнании (фрагменты). Пико делла Мирандола. Речь о достоинстве человека.
- **Тема 4.** Политическая и социальная философия эпохи Возрождения. Тексты для обсуждения на семинаре: Макиавелли Н. Государь (фрагменты). Мор Т. Золотая книга, столь же полезная, как забавная, о наилучшем устройстве государства и новом острове Утопия (фрагменты).
- **Тема 5.** Философское значение Реформации и Контрреформы. Тексты для обсуждения на семинаре: Эразм Роттердамский. Диатриба, или рассуждение о свободе воли (фрагменты). Мартин Лютер. Рабство воли (фрагменты).

Раздел II. Научная революция XVI–XVII веков. Текст для обсуждения на семинаре: Монтень М. Апология Раймунда Сабундского.

- **Тема 6.** Развитие экспериментального и математического естествознания. Тексты для обсуждения на семинаре: Бэкон. Новый Органон (фрагменты). Галилей. Рассуждения о двух новых науках (фрагменты).
- **Тема 7.** Рационализм и эмпиризм XVII–XVIII веков
- **Тема 8.** Философия Рене Декарта. Тексты для обсуждения на семинаре: Декарт. Рассуждение о методе (фрагменты). Декарт. Размышления о первой философии (фрагменты).
- **Тема 9.** Рационализм XVII века (Спиноза, Лейбниц). Тексты для обсуждения на семинаре: Спиноза. Этика (фрагменты). Лейбниц. Монадология Переписка Лейбница и Кларка. (фрагменты).
- **Тема 10.** Физика и метафизика Исаака Ньютона. Текст для обсуждения на семинаре: Переписка Лейбница и Кларка. (фрагменты).

Тема 11. Теория познания в учении Локка, Беркли и Юма. Тексты для обсуждения на семинаре: Дж. Локк. Опыт о человеческом разумении. Книга 2. Главы 1–3 и 5–9. Дж. Беркли. Трактат о принципах человеческого знания. Часть I, §§ 1–33 и 67–72. Д. Юм. Исследования о человеческом познании. Главы 2–5.

Раздел III. Политическая философия XVII–XVIII веков. Тексты для обсуждения на семинаре: Т. Гоббс. Левиафан. Главы XIII, XIV (частично), XVII, XVIII Дж. Локк. Два трактата о правлении. Книга 2. Главы I–IV, VII (частично)

Раздел IV. Философия эпохи Просвещения

Тема 12. Философия французского Просвещения. Тексты для обсуждения на семинаре: П.–А. Гольбах. Система природы (фрагменты) Ш.–Л. Монтескье. О духе законов (фрагменты) Ж.–Ж. Руссо. Об общественном договоре. Кн. 1–2

Тема 13. Философия немецкого Просвещения. Иммануил Кант. Тексты для обсуждения на семинаре: Кант. Критика чистого разума. Введение Кант. Основоположения метафизики нравов (фрагменты)

УЧЕБНИКИ: основная литература:

1. Г. В. Гриненко. История философии: учебник для бакалавров, 4-е изд., перераб. и доп., М.: Юрайт, 2015, https://www.biblio-online.ru/book/istoriya-filosofii-378223.

2. Д. И. Грядовой. История философии: учебник для студентов вузов. Средние века. Возрождение. Новое время. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2015. https://znanium.com/catalog/product/872770.

3. Хрестоматия по философии: учеб. пособие под ред. А. Н. Чумакова. М.: Юрайт, 2016. https://www.biblio-online.ru/book/hrestomatiya-po-filosofii-389073.

Дополнительная литература:

1. История философии: учеб. пособие для вузов под ред. В. В. Васильева, А. А. Кротова, Д. В. Бугая. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: Академический Проект, 2008. https://opac.hse.ru/absopac/index.php?url=/notices/index/161887/default.

2. Л. А. Петрушенко. Философия Лейбница на фоне эпохи. М.: Альфа-М, 2009. https://znanium.com/catalog/product/157905.

3. Философы Нового времени: жизнь и идеи, учеб. пособие, сост.: А. В. Колесникова, В. В. Куликов, М. А. Назарова, С. С. Сергеев, М. Б. Софиенко, С. И. Черных. Новосибирск: Изд-во НГАУ, 2013. https://znanium.com/catalog/product/515969.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: итоговая оценка равна $0,6\,C + 0,4\,E$, где C и E суть накопленная оценка и оценка за экзамен по 10-ти бальной шкале. Накопленная оценка $C = S + 0,1\,(H_1 + H_2 + H_3 + H_4)$ складывается из оценки S за посещение и работу на семинарах и оценок H_i за домашние работы. Критерии оценки работы на семинарах устанавливаются преподавателем, ведущим семинарские занятия, и объявляются на первом семинарском занятии. Суммарный вклад оценки за аудиторную работу в накопленную оценку не может превышать 6 баллов.

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ВВЕДЕНИЕ В КВАНТОВУЮ ТЕОРИЮ ПОЛЯ
НИС на английском языке для студентов 1-го курса и старше
(see also the description in English)

РУКОВОДИТЕЛЬ: М. Б. Скопенков.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2018/19 уч. г., одна пара в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Оказывается, радужные разводы на мыльных пузырях и даже спектр атома можно объяснить с помощью одной очень незатейливой модели. Это игра, в которой по простым правилам по клетчатой доске движется шашка, а мы следим за ее поворотами. Эти «Шашки Фейнмана», с некоторыми серьезными оговорками, могут описать все на свете явления, кроме атомного ядра и гравитации.

Никаких предварительных знаний физики не потребуется; достаточно владения школьной математикой. В частности, курс доступен первокурсникам. Мы будем решать задачи по математике и обсуждать их физический смысл. А в результате познакомимся с базовыми идеями квантовой теории поля.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: нет

ПРОГРАММА:

1. Шашки Фейнмана - простейшая модель электрона. Спин. Заряд. Масса. Уравнение Дирака на решетке*. Эксперимент на двух щелях. Частичное отражение света. Свободная частица*. Спектр атома*. Сходимость шашек Фейнмана к теории Дирака*.

2. Шашки Фейнмана с магнитным полем. Туннельный эффект*. Диаграммы Фейнмана*.

3. Игрушечная модель калибровочной теории на решетке: обмен товарами между городами. Связь с магнитным полем. Квантование: случайные курсы обмена товарами. Точное решение 1- и 2-мерной калибровочной теории на решетке*. Удержание кварков*. Механизм Хиггса*.

УЧЕБНИКИ:

1. Фейнман Р. КЭД. Странная теория света и вещества. Сер. «Библиотечка «Квант»» вып. 66. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 144с.

2. J. Maldacena, The symmetry and simplicity of the laws of physics and the Higgs boson, Europ. J. Phys. 37:1 (2016), https://arxiv.org/abs/1410.6753.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Оценка за НИС равна $\min(10, [L/15])$, где лагранжиан L состоит из следующего.

1. Экзамен по курсу проходит (для одного студента) не более E минут и оценивается из E очков. Здесь $E = 80$.

2. Контрольная на N минут оценивается из $N/2$ очков. За неполное решение ставится неотрицательная доля полного. Всего будет 2-4 контрольных.

3. Идеальное письменное решение оценивается из 8 очков. За неполное решение ставится, как правило, 0 очков, в отдельных случаях — 7 очков. Если письменное решение оценено менее, чем в 7 очков, то после получения оценки с замечаниями рекомендуется написать новую версию решения, пока очередная версия не будет оценена в 7 или 8 очков. Письменные решения проверяются *одно в две недели* (у одного студента). Рекомендации по написанию идеальных письменных решений: http://www.mccme.ru/circles/oim/home/pism.pdf.

4. Устная задача, сданная на занятии — от 1 до 3 очков (в зависимости от сложности).

5. Если студент ставит себе плюсик за домашнюю задачу (не сданную устно на прошлом занятии), то это 1 очко. Если это решение проверяется (у доски или на месте), то «1» заменяется на число от -4 до $+4$ в зависимости от того, насколько сложна задача, насколько серьезны ошибки в решении и исправлены ли они в процессе обсуждения.

6. Нахождение не обнаруженной ранее ошибки в задачнике по курсу — 1 очко.

ЭЛЕМЕНТЫ ФРАКТАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ
НИС для студентов 1-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛЬ: В. В. Шихеева.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: 3-й модуль 2018/19 уч. г., два занятия в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Курс предназначен для студентов младших курсов и излагает начальные знания, позволяющие в дальнейшем использовать аппарат фрактальной геометрии для решения прикладных задач. Будут рассмотрены примеры классических детерминированных фракталов, введены понятия системы итерированных функций (СИФ), детерминированного фрактала как аттрактора СИФ, кодового пространства СИФ и фрактальной размерности компактного множества. Будут исследованы свойства динамических систем на аттракторе и на кодовом пространстве СИФ, рассмотрены детерминированые и стохастические методы построения фракталов и методы вычисления фрактальных размерностей. Будут рассмотрены мультифракталы, спектр обобщённых размерностей Реньи и приведены примеры применения аппарата фрактальной геометрии в прикладных задачах.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: основные понятия общей топологии, начала линейной алгебры

ПРОГРАММА:

- Классические детерминированные фракталы. Канторово множество, треугольник Серпинского, кривая Коха.
- Множества Жюлиа как классический аттрактор. Множество Мандельброта как библиотека множеств Жюлиа.
- Компактные множества и метрика Хаусдорфа. Сжимающие преобразования и теорема о неподвижной точке.
- Системы итерированных функций (СИФ) и детерминированные фракталы — аттракторы СИФ.
- Системы итерированных функций со сгущением.
- Коллаж-теорема как аппарат для генерации фракталов.
- Кодовое пространство СИФ. Адресная функция.
- Эквивалентность Канторова множества и аттрактора СИФ.
- Динамическая система сдвига на аттракторе СИФ.
- Динамическая система на кодовом пространстве. Поднятая СИФ и динамика поднятой системы.
- Понятие хаотичной динамической системы. Хаотичность динамической системы сдвига.
- Реализация фрактала с использованием генератора случайных чисел.
- Фрактальная размерность. Теорема о фрактальной размерности аттрактора СИФ с подобиями.
- Экспериментальное вычисление размерности фрактала.
- Мультифрактальный спектр и спектр обобщённых размерностей Реньи.
- Примеры использования мультифрактального спектра в прикладных задачах.

УЧЕБНИКИ:

1. Р. Кроновер Фракталы и хаос в динамических системах
2. M. Barnsley, Fractals everywhere
3. Е. Федер, Фракталы
4. В. Божокин, Д. Паршин, Фракталы и мультифракталы, учебное пособие, Ижевск, 2001

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: $0,5$ работа на семинарах $+$ $0,5$ экзамен

Эллиптические интегралы и эллиптические функции
НИС на английском языке для студентов 3-го курса и старше
(see also the description in English)

РУКОВОДИТЕЛЬ: Т. Такебе.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2018/19 уч. г., одна пара в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Эллиптическая функция определяется как двоякопериодическая мероморфная функция на комплексной плоскости. Теория эллиптических интегралов, начатая Фаньяно, Эйлером, Лежандром, Гауссом и др. в XVIII веке, была превращена в теорию эллиптических функций в XIX веке Абелем и Якоби. Затем Риман, Вейерштрасс и Лиувилль развили теорию дальше, используя комплексный анализ. Основанная таким образом теория эллиптических функций является прототипом современной алгебраической геометрии. Эллиптические функции и эллиптические интегралы появляются в различных задачах математики, а также в физике. Примеры: длина эллипса, арифметико-геометрическое среднее, решения физических систем (маятник, волчок, скакалка, уравнение КдФ), решение уравнений пятой степени и др. В этом курсе мы рассмотрим, прежде всего, аналитические аспекты и приложения.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: курсы анализа и ТФКП.

ПРОГРАММА:

1. Введение
2. Вещественные эллиптические интегралы и длины дуг кривых
3. Классификация эллиптических интегралов
4. Приложения эллиптических интегралов
5. Вещественные эллиптические функции Якоби
6. Римановы поверхности алгебраических функций
7. Эллиптические кривые
8. Комплексные эллиптические интегралы
9. Теорема Абеля – Якоби
10. Общая теория эллиптических функций
11. $\wp$-функция Вейерштрасса
12. Тэта-функции эллиптические функции Якоби
13. Комплексные

УЧЕБНИКИ: Мы не будем следовать какому-то конкретному учебнику, однако, следующие книги могут быть полезны для понимания происходящего:

1. N. I. Akhiezer, Elements of the Theory of Elliptic Functions, Moscow (1970).
2. E. T. Whittaker and G. N. Watson, A course of modern analysis, Cambridge University Press (1952).
3. A. Hurwitz, R. Courant, Vorlesungen über allgemeine Funktsionentheorie und elliptische Funktionen, Springer, Berlin (1964).

4. M. Toda, Introduction to Elliptic Functions, Nihon-Hyoron-sha, Tokyo (2001).

5. H. Umemura, Theory of Elliptic Functions — analysis on elliptic curves, University of Tokyo Press, Tokyo (2000).

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: $\min(10,$ оценки за домашние работы$)$. Каждая выполненная домашняя работа оценивается в 1 или 2 балла.

КОММЕНТАРИЙ: Если число зарегистрированных до июня 2019 г. студентов окажется меньше 10, НИС будет отменён.

Course descriptions in English

Listed in this section are the courses that will be given in English if required (e.g., if some students do not understand Russian). All these courses will be equipped with printed matter in English.

Algebraic Geometry: A First Geometric Look
a course for 2nd year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

LECTURER: V. S. Zhgoon.

LEARNING LOAD: Spring term of 2018/19 A. Y., two classes per week, 6 credits per semester.

DESCRIPTION: Algebraic geometry studies geometric loci looking locally as a solution set for a system of polynomial equations on an affine space. The main feature of this subject, that it provides an algebraic explanation to various geometric properties of the figures and it the same time it give geometric intuition to purely algebraic contructions. It plays an important role in many areas of mathematics and theoretical physics, and provides the most visual and elegant tools to express all aspects of the interaction between different branches of mathematical knowledge. The course gives the flavor of the subject by presenting examples and applications of the ideas of algebraic geometry, as well as a first discussion of its technical tools.

PREREQUISITES: linear and multilinear algebra, and basic ideas of polynomials, commutative rings and their ideals, tensor products, affine and projective spaces, topological spaces and their open, closed and compact subsets. No deep knowledge is assumed, all essential definitions and technique will be recalled during the course.

SYLLABUS:

- Projective spaces. Geometry of projective quadrics. Spaces of quadrics.
- Lines, conics. Rational curves and Veronese curves. Plane cubic curves. Additive law on the points of cubic curve.
- Grassmannians, Veronese's, and Segre's varieties. Examples of projective maps coming from tensor algebra.
- Integer elements in ring extensions, finitely generated algebras over a field, transcendence generators, Hilbert's theorems on basis and on the set of zeros.
- Affine Algebraic Geometry from the viewpoint of Commutative Algebra. Maximal spectrum, pullback morphisms, Zariski topology, geometry of ring homomorphisms.
- Agebraic manifolds, separateness. Irreducible decomposition. Projective manifolds, properness. Rational functions and maps.
- Dimension. Dimensions of subvarieties and fibers of regular maps. Dimensions of projective varieties.
- Linear spaces on quadrics. Lines on cubic surface. Chow varieties.
- Vector bundles and their sheaves of sections. Vector bundles on the projective line. Linear systems, invertible sheaves, and divisors. The Picard group.
- Tangent and normal spaces and cones, smoothness, blowup. The Euler exact sequence on a projective space and Grassmannian.

TEXTBOOKS:

- A.L.Gorodentsev, Algebra II. Textbook for Students of Mathematics. Springer, Ch. 1, 2, 10, 11, 12.
- A. L. Gorodentsev, Algebraic Geometry Start Up Course, MCCME:
  http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/projgeom/1718/lec_total.pdf (realise 2017),
  http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/projgeom/tot-2006.ps.gz (realise 2006).
- J. Harris, Algebraic Geometry. A First Course, Springer.
- D.Mumford, Red book of varieties and schemes, Springer LNM 1358.

GRADING RULES: $1/3\times$(solution of the problems from the task sheet)$+2/3\times$(final exam)

COMMENTS: The final exam consists of two questions on theory and one problem, similar to the problems from the sheets.

Algebraic Geometry. Language of schemes
a course for 3rd year students and higher

LECTURER: V. A. Vologodsky.

LEARNING LOAD: two semesters of 2018/19 A. Y., two classes per week, 6 credits per semester.

DESCRIPTION: The course will cover most of «Algebraic Geometry» by Hartshorne. Additional topics may include: general Riemann – Roch Theorem, the Hilbert scheme and its application to the existence theorems, a proof the Weil conjectures for curves over finite fields, rational curves on Fano varieties («bend-and-break trick»).

PREREQUISITES: Commutative algebra: it is expected that students have studied the material from the book «Introduction To Commutative Algebra» by Atiyah and MacDonald, though some of the results will be reviewed and even reproved. Homological Algebra and sheaf theory. Cohomology of sheaves. I recommend the book «Methods of homological algebra» by Gelfand and Manin though it has more material then we will actually use. If you can reproduce a proof that the cohomology of the constant sheaf $\mathbb{R}$ on a smooth manifold can be computed by the de Rham complex you should not worry.

SYLLABUS:

- Review of commutative algebra
- Schemes, fiber products
- Proper morphisms, valuation criteria
- Coherent sheaves
- Divisors, the Picard group
- The case of curves
- Differentials, smooth morphisms
- Cohomology of coherent sheaves
- Serre duality
- Riemann – Roch theorem
- Applications to counting points over finite field
- Introduction to the deformation theory with applications to rational curves on Fano varieties

TEXTBOOKS: Algebraic Geometry by R. Hartshorne; Algebraic varieties by G. Kempf; Foundations of Algebraic Geometry by R. Vakil (http://math.stanford.edu/$\sim$vakil/216blog/FOAGaug2610public.pdf).

GRADING RULES: course grade $=0.5\times$ (homework grade) $+\ 0.5\times$ (final exam grade) rounded to the nearest integer (and, for an integer n, the number $n+0.5$ is rounded to $n+1$).

ALGEBRAIC NUMBER THEORY
a seminar for 3rd year students and higher

ADVISOR: M. Z. Rovinsky.

LEARNING LOAD: Spring term of 2018/19 A. Y., two classes per week, 6 credits per semester.

DESCRIPTION: The goal of the course is to introduce some basic notions and results of related to the algebraic extensions of the field of rational numbers. One of the objectives will be a relatively explicit construction of abelian extensions of p-adic fields using formal groups (Lubin–Tate theory). If time permits, the Galois groups of abelian extensions of number fields (Global class field theory) and related Artin reciprocity law (generalizing Gauß' quadratic reciprocity) will also be discussed.

PREREQUISITES: the Galois theory and standard courses of the 1st year bachalor program: algebra, calculus, topology.

SYLLABUS:

- Global (e.g., number) fields, their invariants and topologies on them
- Local fields (e.g., p-adic numbers), ramification theory, their multiplicative structure
- Relations between local and global properties (Hasse principle), Minkowski–Hasse theorem
- Commutative algebra of Dedekind domains; finiteness theorems for units and class groups
- Hilbert symbol and quadratic forms over p-adic fields
- Formal groups and local class field theory
- Tate cohomology, norm residue symbol and «abstract» class field theory
- Simple algebras and Brauer groups; Brauer groups of local fields; Brauer groups of global fields
- Global class field theory; reciprocity laws

TEXTBOOKS:

- E. Artin, J. Tate, *Class field theory.* Benjamin, 1968.
- *Algebraic Number Theory.* Ed. by J. W. S. Cassels, A. Frölich. Thompson, 1967.
- K. Iwasawa, *Local Class Field Theory.* OUP, 1986.
- J.-P. Serre, *Corps locaux.* 3ème édition, 1968.

GRADING RULES: the final grade equals

$$\min[10, 20/3((\text{ratio of solved problem of the problem sets}) + (\text{ratio of solved problem of the final exam}))]\,.$$

The final exam is written, at the end of the term. A half-integer grade is rounded to the bigger nearest integer, another fractional grade is rounded to the nearest integer.

ALGEBRAIC TOPOLOGY
a seminar for 3rd year students and higher

ADVISOR: M. V. Finkelberg.

LEARNING LOAD: Spring term of 2018/19 A. Y., one class per week, 3 credits per semester.

DESCRIPTION: Everybody knows that the UN declared 2019 the year of the periodic table of elements. Mathematics without Algebraic Topology is like Chemistry without the Periodic Table.

PREREQUISITES: 1st year Topology; 1st year Algebra; 1st year Analysis; 1st year Geometry; Linear Algebra

SYLLABUS:

1. Topological spaces: examples, properties, operations.
2. The notion of homotopy. Fibrations and cofibrations. Cone and homotopy fibre. Suspension and loop spaces. Eckmann–Hilton duality.
3. Homotopy groups. Exact sequence of a fibration. Coverings and the fundamental group.
4. Axiomatics of cohomology theories. Uniqueness theorem. Construction of singular cohomology.
5. Homology and cohomology of CW-complexes. Hurevich theorem.
6. $K(\pi, n)$ spaces. Postnikov tower.
7. Leray spectral sequence of a fibration.
8. Characteristic classes of vector bundles: Stiefel – Whitney, Chern, Pontriagin.

TEXTBOOKS: «Algebraic Topology» by Allen Hatcher.

GRADING RULES: $\lceil$ 1/10 of the total percent of the correctly solved home assignments $\rceil$

Elementary introduction to quantum field theory
a seminar for 1st year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

ADVISOR: M. B. Skopenkov.

LEARNING LOAD: Fall term of 2018/19 A. Y., one class per week, 3 credits per semester.

DESCRIPTION: It turns out that raibow patterns on soapbubbles and even atomic spectrum can be explained by means of one simple-minded model. It is game, in which a checker moves on a checkerboard by certain simple rules, and we count the turnings. This 'Feynmann checkerboard' can explain all phenomena in the world (with a serious proviso) except atomic nuclea and gravitation.

No prerequisites in physics are assumed; knowledge of school-level mathematics is sufficient. In particular, the course is accessible for 1st year students. We are going to solve mathematical problems and discuss their physical meaning. As a result, we are going to learn basic ideas of quantum field theory.

PREREQUISITES: no

SYLLABUS:

1. Feynman's checkerboard: the simplest model of an electron. Spin. Charge. Mass. Lattice Dirac's equation. Double-slit experiment. Partial reflection of light. Free particle*. Atomic spetrum*. Convergence of Feynman's checkerboard to Dirac's theory.
2. Feynman's checkerboard with a magnetic field. Tunnelling*. Feynmann diadrams*.
3. Toy model of lattice gauge theory: exchange of goods between cities. Relation to magnetic field. Quantization: random exchange rates. Exact solution of 1- and 2-dimensional lattice gauge theory*. Confinement of quarks*. Higgs mechanism*.

TEXTBOOKS:

1. Feynman, Richard (2006). QED: The strange theory of light and matter. Princeton University Press. ISBN 0-691-12575-9. Фейнман Р. КЭД. Странная теория света и вещества. Сер. «Библиотечка "Квант"» вып. 66. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 144с.
2. J. Maldacena, The symmetry and simplicity of the laws of physics and the Higgs boson, Europ.J.Phys.37:1(2016), https://arxiv.org/abs/1410.6753

GRADING RULES: the final grade equals $\min(10, [L/15])$, where the Lagrangian L consists of the following.

1. Exam contributes up to 80 points.
2. Test of N minutes contributes up to $N/2$ points. There are going to be 2–4 tests.
3. An ideal written solution contributes 8 points. Incomplete solution usually contributes 0 points, in special cases — 7 points. Written solutions are accepted at most *one per two weeks* (per student). Recommendations for ideal written solutions: http://www.mccme.ru/circles/oim/home/pism.pdf
4. Aural solution contributes 1–3 points depending on the problem complexity.
5. A homework problem added by a student to the conduit contributes 1 point. If the solution is checked, then «1» is replaced by a number from -4 to $+4$ depending on the problem complexity and how serious the gaps are.
6. Finding a bug not found before contributes 1 point.

An introduction to elliptic operators
a seminar for 3rd year students and higher

ADVISOR: A. G. Gorinov.

LEARNING LOAD: Fall term of 2018/19 A. Y., one class per week, 3 credits per semester.

DESCRIPTION: In this seminar we will cover the basics of the theory of elliptic operators, examples of which include the de Rham and Dolbeault operators, as well as their generalisations such as the Dirac operator. We will explain how several seemingly unrelated results in geometry and topology (e.g. the Hirzebruch and Rokhlin signature theorems and the Riemann-Roch theorem) all follow from the general index formula by M. Atiyah and I. Singer, and sketch a proof of the latter.

PREREQUISITES: The main prerequisites are smooth manifolds and singular cohomology as covered e.g. in Algebraic Topology by A. Hatcher, chapters 2 and 3. An introductory course on topological vector spaces would be very helpful. We will recall some or all of the prerequisites if necessary.

SYLLABUS:

- Vector bundles and characteristic classes: a summary of results.
- Differential operators: the definition and first examples.
- Elliptic operators: the definition and basic properties.
- Riemannian metrics on manifolds and the de Rham operator.
- The signature operator.
- Complex manifolds and the Dolbeault operator.
- Clifford algebras and their representations.
- Reduction of the structure group of a vector bundle. Spin structures on vector bundles.
- Dirac operators. Constructing Dirac operators using Spin structures.
- Elliptic regularity and related results about elliptic operators on compact manifolds.
- First applications: the de Rham and Hodge decomposition theorems; the Serre duality.
- The Atiyah-Singer index formula.
- Applications of the index formula: the Riemann–Roch theorem, the Hirzebruch signature theorem, V. Rokhlin's signature theorem.

TEXTBOOKS:

- *Algebraic Topology* by A. Hatcher, freely available online at http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html.
- *Spin geometry* by H. B. Lawson and M.-L. Michelsohn.
- *Seminar on the Atiyah-Singer index theorem* by R. S. Palais et al.
- *Characteristic classes* by J. Milnor and J. Stasheff.

- *The Atiyah-Singer index theorem* by P. Shanahan.
- *Differential analysis on complex manifolds* by R. O. Wells.

Occasionally we'll use other sources as well.

GRADING RULES: 50% for assessed work + 50% for final written exam, rounded to the nearest integer, halfintegers are rounded up.

An introduction to stacks
a seminar for 3rd year students and higher

ADVISORS: C. Brav, A. G. Gorinov.

LEARNING LOAD: Spring term of 2018/19 A. Y., two classes per week, 6 credits per semester.

DESCRIPTION: Both in topology and in algebraic geometry quotients are often badly behaved, if they exist at all, which leads to problems when one wishes to construct moduli spaces, i.e. spaces whose points naturally correspond to isomorphism classes of objects of some type, such as vector bundles or algebraic curves. Stack theory offers a way around this problem: one enlarges the category of spaces to include more objects (stacks). They are more complicated than usual spaces or algebraic varieties, but behave essentially in the same way: most constructions that work for spaces (e.g. sheaves or fibrations) have stacky analogues. As the name suggests, this seminar is an introduction to stacks. We will start with examples and explain the motivation behind the definition of a stack. Then we will take time to digest this definition and see that several familiar constructions (e.g. homotopy quotients in algebraic topology or moduli spaces of curves in algebraic geometry) are in fact stacks in disguise. If time allows, we will cover other examples such as Artin stacks and/or stable curves.

PREREQUISITES: basic algebraic topology (e.g. as covered in Algebraic topology by A. Hatcher), basic algebraic geometry (e.g. Basic algebraic geometry by I. Shafarevich or Algebraic geometry by R. Hartshorne, chapters 2 and 3) and category theory.

SYLLABUS:

- First examples of stacks. Triangles in $\mathbb{R}^2$. Orbifolds.
- Faithfully flat descent for quasi-coherent sheaves.
- Functor of points view of schemes.
- Algebraic spaces.
- Categories fibered in groupoids. The definition of a stack.
- Deligne – Mumford stacks. Moduli spaces of curves and universal curves.
- Sheaves on stacks and cohomology.
- Further examples.

TEXTBOOKS: The main references are

- *Algebraic stacks* by K. Behrend, B. Conrad, D. Edidin, B. Fantechi, W. Fulton, L. Göttsche und A. Kresch. https://www.math.uzh.ch/index.php?id=pr_vo_det&key1=1287&key2=580&key3=163&semId=13&L=1.
- *Equivariant Sheaves and Functors* by J. Bernstein and V. Lunts, Springer LNM 1578.
- *Equivariant geometry and the cohomology of the moduli space of curves* by D. Edidin, https://arxiv.org/abs/1006.2364.
- *A homotopy theory for stacks* by S. Hollander, https://arxiv.org/abs/math/0110247.
- Frank Neumann, *Algebraic stacks and moduli of vector bundles*, by F. Neumann, https://www.cimat.mx/~luis/seminarios/Pilas-algebraicas/neumann-Stacks.pdf.
- *Notes on Grothendieck topologies* by A. Vistoli, https://arxiv.org/abs/math/0412512.

Occasionally we'll use other sources as well.

GRADING RULES: The final mark is 100% accumulated mark. The default way to earn it is to give a talk and prepare the notes in LaTeX.

Analytic Number Theory
a seminar for 3rd year students and higher

ADVISOR: A. B. Kalmynin.

LEARNING LOAD: two semesters of 2018/19 A. Y., one class per week, 3 credits per semester.

DESCRIPTION: Analytic number theory is an area of number theory that uses analytic methods to study properties of the integers. No progress towards some famous problems such as Golbach's conjecture, Waring's problem or twin primes conjecture would be possible without the development of analytic methods such as bounds for exponential sums and theorems on the distribution of prime numbers. In the first part of the course we will mostly concentrate on the properties of prime numbers, as they are building blocks of integers. We will discuss different proofs of the Prime Number Theorem, distribution of primes in arithmetic progressions and also some basic sieve methods. In the second semester we will learn how to use Fourier-analytic principles (and heuristics) to obtain number- theoretic results. For instance, we will discuss the large sieve method and its numerous applications, such as results on the least quadratic nonresidues, and derive some properties of the Riemann zeta-function from general results on exponential sums and certain bilinear inequalities.

PREREQUISITES: complex analysis (basic properties of holomorphic functions, Cauchy's integral formula, maximum modulus principle, Weierstrass factorization theorem), analysis (O-notation, Lebesgue – Stieltjes integration), algebra (fundamental theorem of arithmetic)

SYLLABUS:

Fall term: Distribution of prime numbers.

1. Arithmetical functions, Dirichlet convolution of arithmetical functions. Partial summation method, Dirichlet's hyperbola method. Average orders of τ_k, σ_k, φ and other arithmetical functions. Möbius function, von Mangoldt function.
2. The Prime Number Theorem. Contour integration method. Basic properties of Riemann zeta function, zero-free region, explicit formula. Tauberian proof of PNT*. Selberg symmetry formula, elementary proof of PNT. Banach algebra proof of PNT*.
3. Prime numbers in arithmetic progressions. Dirichlet characters and Dirichlet L-functions. Siegel-Walfisz theorem. Siegel zeros and class number problem*.
4. Sieve methods: Eratosthenes-Legendre sieve, combinatorial sieves. Brun's constant. There exist infinitely many m such that both m and $m-2$ have at most nine prime factors.

Spring term: Fourier-analytic number theory.

1. The large sieve method and its applications. Generalized Hilbert inequality. Least quadratic nonresidue, sums of unit fractions, Selberg's theorem on primes in very short intervals, equidistribution in residue classes.
2. Equidistribution modulo 1. Discrepancy, Erdős – Turan inequality. Equidistribution of values of polynomials. Van der Corput sets*. Pair correlations*.
3. Exponential sums. Estimates for Weyl sums. Theory of exponent pairs, A and B processes. Number-theoretic applications. Vinogradov's method*.
4. Properties of the Riemann zeta-function. Hardy – Littlewood approximate functional equation. Mean values and upper bounds for zeta. Results on distribution of zeros.

TEXTBOOKS:

1. A. A. Karatsuba, «Basic analytic number theory».
2. H. L. Montgomery, R. C. Vaughan, «Multiplicative number theory I: Classical theory».
3. A. A. Karatsuba, S. M. Voronin, «The Riemann zeta-function».
4. T. Tao, «Analytic prime number theory»,
   https://terrytao.wordpress.com/category/teaching/254a-analytic-prime-number-theory/.

GRADING RULES: 0.3 (problem sets) + 0.7 (exam).

COMMENTS: «$*$» in the sullabus means that the amount of time that will be spent on this topic depends on preferences of students.

Calculus of Variations
a seminar for 2^{nd} year students and higher

ADVISOR: M. Mariani.

LEARNING LOAD: Spring term of 2018/19 A. Y., one class per week, 3 credits per semester.

DESCRIPTION: The lectures provide an introduction to Calculus of Variations, addressing both classical subjects (action functionals, isoperimetric problems), and modern approaches (direct methods, applications to physics and optimal control). The student will be required to understand the theoretical aspects of the theory, as well as to apply it to specific cases.

PREREQUISITES:

- Mathematical Analysis.
- Elementary general Topology.
- Basic Functional Analysis.

SYLLABUS:

1. Historical model problems and preliminaries: convex analysis, Sobolev spaces.
2. Classical methods: Euler-Lagrange equations, optimal control, the Hamiltonian approach, viscosity solutions, applications.
3. Direct methods: basic theory, elliptic problems (existence, uniqueness, regularity), Euler–Lagrange revisited, relaxation of integral functionals, applications.

TEXTBOOKS:

- Bernard Dacorogna; Introduction to the calculus of variations; Imperial College Press, 3rd ed (2014).
- Bruce van Brunt; The Calculus of Variations; Springer (2004).
- Israel M. Gelfand, Sergey V. Fomin; Calculus of Variations; Dover (1963) [Selected topics].
- Michael Struwe; Variational Methods; Springer (2008) [Selected topics].
- Mariano Giaquinta, Stefan Hildebrandt; Calculus of Variations I; Springer (2004) [Selected topics].

GRADING RULES: final score equals $0.3 \cdot \text{cumalative} + 0.35 \cdot \text{oral final exam} + 0.35 \cdot \text{written final exam}$, where «cumulative» means controls during the semester.

COMMENTS: Depending on the number and interests of students, one of the following topic can be addressed in some additional lectures: optimal control, minimal surfaces, homogenization, hamiltonian dynamics.

Combinatorics of Vassiliev Invariants
a seminar for 3^{rd} year students and higher

ADVISORS: M. E. Kazarian, S. K. Lando.

LEARNING LOAD: two semesters of 2018/19 A. Y., one class per week, 3 credits per semester.

DESCRIPTION: This students' research seminar is devoted to combinatorial problems arising in knot theory. The topics include finite order knot invariants, graph invariants, matroids, delta-matroids, integrable systems and their combinatorial solutions. Hopf algebras of various combinatorial species are studied. Seminar's participants give talks following resent research papers in the area and explaining results of their own.

PREREQUISITES: no.

SYLLABUS:

1. Knots and their invariants.
2. Knot diagrams and chord diagrams.
3. 4-term relations for chord diagrams, graphs, and delta-matroids.
4. Weight systems.
5. Constructing weight systems from Lie algebras.
6. Hopf algebras of graphs, chord diagrams and delta-matroids.
7. Combinatorial solutions to integrable hierarchies.
8. Khovanov homology.

TEXTBOOKS:

1. S. Chmutov, S. Duzhin, Y. Mostovoy. CDBook. CUP, 2012.
2. S. Lando, A. Zvonkin. Graphs on Surfaces and Their Applications. Springer, 2004.

GRADING RULES: Regular participation in the seminar is necessary for marking. However, only the participation can not contribute more than 8 points. For getting a higher score, you have to give a talk either on resent actual papers or on your own results in scientific directions of the seminar.

CONSTRUCTIVE METHODS OF FUNCTIONAL ANALYSIS
a seminar for 3rd year students and higher

ADVISOR: A. K. Pogrebkov.

LEARNING LOAD: Spring term of 2018/19 A. Y., two classes per week, 6 credits per semester.

DESCRIPTION: This is a version of the standard course «Functional Analysis – 2» oriented to various applications of the theory, especially in mathematical physics. We consider distributions, regularization, unbounded operators in the Hilbert space, the Fourier transform, etc.

PREREQUISITES: linear algebra, calculus of one and several real variables, functions of complex variable, functional analysis – 1, theory of linear partial differential equations.

SYLLABUS:

1. Different kinds of dstributions, local properties, regularization, convergence of distributions.
2. Sokhotski – Plemelj formulas, limiting values of holomorphic functions.
3. Fourier transform, fundamental solutions of PDE's.
4. Unbounded operators in the Hilbert space, domains and graphs, conjugate operators, specter.
5. Symmetric and self-adjoint operators, the spectral theorem, the Stone theorem.
6. Topologies on the space of unbounded operators.
7. Tensor products.

TEXTBOOKS:

1. Michael Reed, Barry Simon, «Methods of modern mathematical physics», vol. 1, Academic Press, New York, 1971; vol. 2, Academic Press, New York, 1978.
2. Kosaku Yosida, «Functional Analysis», Springer, Berlin, 1965.
3. Кристоф Морен, «Методы гильбертова пространства», М.: Мир, 1965.

GRADING RULES: the final grade is 0,6 (cumulative grade) + 0,4 (final exam grade), where the cumulative grade is proportional to the number of solved problems (so that 10 corresponds to 75% of all problems), rounded to the nearest integer (half-integers are rounded upwards). Active participants will get some bonuses.

Convex and Algebraic Geometry
a seminar for 2nd year students and higher

ADVISORS: A. I. Esterov, V. A. Kiritchenko, E. Yu. Smirnov.

LEARNING LOAD: Spring term of 2018/19 A. Y., one class per week, 3 credits per semester.

DESCRIPTION: Our research seminar is devoted to the many connections between convex and algebraic geometry. This interaction has many important applications in various areas of mathematics: combinatorics, representation theory, mathematical physics to name a few. A classical and one of the most well-known examples is the combinatorial description of an important class of algebraic varieties — the so-called toric varieties — in terms of polytopes. Yet another recent and up-to-date application is the theory of Newton–Okounkov bodies. Participants will tell about classical topics as well as recent papers that they find important on http://arxiv.org/find/grp_math/1/AND+cat:+math.AG+all:+polytope/0/1/0/all/0/1 and http://arxiv.org/find/grp_math/1/AND+cat:+math.RT+all:+polytope/0/1/0/all/0/1, providing extensive background material for those less familiar with the subject.

PREREQUISITES: Accessible to geometrically oriented 2nd year students. No prerequisites required beyond the mandatory courses from the 1st year (and the fall of the 2nd year, for the spring term). Introduction to algebraic geometry is a plus, but not required.

SYLLABUS: Talks are often related to the following topics:

- Convexity and lattices
- Smooth convex bodies
- Convex polyhedra
- Mixed volumes
- Convex inequalities
- Ehrhart polynomials
- Patchworking
- Bernstein–Kushnirenko Theorem
- Fiber polytopes and polyhedral subdivisions
- Tropical and Enumerative Geometry
- Coxeter groups and polytopes
- Number of faces of a convex polytope
- Gelfand–Zetlin polytopes and Schubert calculus

Partticular topics for the year 2019–20 and relevant additional bibliographical references will be announced in more detail in the spring of 2019.

TEXTBOOKS:

- Ziegler G.M. Lectures on Polytopes, 1995
- Maclagan D., Sturmfels B., Introduction to Tropical Geometry, 2015

- Viro O., Itenberg I. Patchworking Algebraic Curves Disproves the Ragsdale Conjecture, 1996
- Gelfand I., Kapranov M., Zelevinsky A. Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants, 1994

COMMENTS: Students are encouraged to give talks at research seminars. This way they learn how to communicate their knowledge to their colleagues in comprehensible and attractive way. To prepare a good talk, it is important to attend talks of senior colleagues to see the best practices. It is equally important to attend talks of other students and to learn from their mistakes. When you fail to follow the talks of fellow students you might get some ideas on how to improve your own talk. For this reason, we encourage young participants to attend talks of their classmates, ask questions and make comments.

GRADING RULES: There will be two separate grades O_A (the attendance grade) and O_T (the talk grade). To get 10 for attendance you have to be an active participant of at least 2/3 of the seminars in the fall term. To be an active participant means that you not only listen to the talk but also understand the main statement of the talk and are able to work out the simplest meaningful application of this statement. To get the perfect grade for your own talk you have to formulate a result with all necessary definitions so that the audience understands it. You are also expected to prepare and give the audience a simple problem about applications of the main result. The final grade for the seminar will be determined as follows: $O_F = 60\%O_A + 40\%O_T$.

You will get extra points if you attend more than 2/3 of the seminars and/or prepare an especially interesting talk. For instance, active participants of all seminars will get 90% contribution to the final grade. Similarly, a brilliant talk (at the level of the colloquium talk) will yield 90% contribution to the final grade.

DIFFERENTIAL GEOMETRY
a seminar for 2nd year students and higher

ADVISOR: P. E. Pushkar.

LEARNING LOAD: Spring term of 2018/19 A. Y., two classes per week, 6 credits per semester.

DESCRIPTION: The course will serve as an introductory guide to basic topics of Differential geometry: very first introduction to Symplectic and Contact Geometry, the theory of Riemannian manifolds, the theory of affine connections on manifolds, geodesics.

PREREQUISITES: Calculus on Manifolds, basics of Geometry and Topology, Linear Algebra including tensors.

SYLLABUS:

1. Symplectic and Contact structures. Darboux theorems. Reductions.
2. Differential connection.
3. Parallel transport. Curvature.
4. Affine connection.
5. Introduction to characteristic classes.
6. Riemannian manifold. Levi – Civita connection.
7. Riemannian curvature tensor.
8. Geodesics. The Hopf – Rinow theorem.
9. First and second variation of arc length.
10. Jacobi's equation and conjugate points.

TEXTBOOKS:

1. Milnor, J.: Morse theory.
2. Stasheff, J. and Milnor, J.: Characteristic Classes.
3. Arnol'd V. I.: Mathematical Methods of Classical Mechanics.

GRADING RULES: 50% for assessed work + 50% for final written exam, rounded to the nearest integer, halfintegers are rounded up.

ELECTRICAL VARIETIES
a seminar for 2nd year students and higher

ADVISOR: V. G. Gorbounov.

LEARNING LOAD: Spring term of 2018/19 A. Y., one class per week, 3 credits per semester.

DESCRIPTION: We will discuss the new mathematical features of the classical theory of electrical networks developed by Ohm and Kirkhoff more than 100 years ago. These include the new type of the cluster algberas which were originally introduced for studying the variety of totally positivity matrices, new types of discreet integrable systems, the representations of the Temperley–Lieb algebra, the important algebra for the knot theory and the theory of quantum integrable systems.

PREREQUISITES: Linear Algebra, first year of Analysis.

SYLLABUS:

1. The modern approach to the theory of totally positive matrices developed by G. Lusztig.
2. The work of A. Berenstein, S. Fomin, A. Zelevinnsky on the cluster algebra related to the general linear group.
3. Introduction to the theory of electrical networks.
4. Electrical varieties as the new approach to the theory of electrical networks.

TEXTBOOKS: typed lecture notes will be available.

GRADING RULES: 50% for assessed work + 50% for final written exam, rounded to the nearest integer, halfintegers are rounded up.

ELLIPTIC INTEGRALS AND ELLIPTIC FUNCTIONS
a seminar for 3^{rd} year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

ADVISOR: T. Takebe.

LEARNING LOAD: Spring term of 2018/19 A. Y., one class per week, 3 credits per semester.

DESCRIPTION: An elliptic function is defined as a doubly periodic meromorphic function on the complex plane. The study of elliptic integrals started by Fagnano, Euler, Legendre, Gauss and others in the eighteenth century was turned into the theory of elliptic functions in the nineteenth century by Abel and Jacobi. Then Riemann, Weierstrass and Liouville developed the theory further by using complex analysis. The theory of elliptic functions thus founded is a prototype of today's algebraic geometry. On the other hand, elliptic functions and elliptic integrals appear in various problems in mathematics as well as in physics. Examples: arclength of an ellipse, arithmetic-geometric mean, solutions of physical systems (pendulum, top, skipping rope, the KdV equation), solution of quintic equations, etc. In this research seminar (lecture style) we shall put emphasis on analytic aspects and applications.

PREREQUISITES: calculus, complex analysis

SYLLABUS:

1. Introduction
2. Real elliptic integrals and arclength of curves
3. Classification of elliptic integrals
4. Applications of elliptic integrals
5. Jacobi's elliptic functions (real case)
6. Riemann surfaces of algebraic functions
7. Elliptic curves
8. Complex elliptic integrals
9. Abel–Jacobi theorem
10. Elliptic functions, general theory
11. The Weierstrass $\wp$-function
12. Theta functions
13. Jacobi's elliptic functions (complex case)

TEXTBOOKS: No textbooks will be used. However the following would help understanding:

1. N. I. Akhiezer, Elements of the Theory of Elliptic Functions, Moscow (1970).
2. E. T. Whittaker and G. N. Watson, A course of modern analysis, Cambridge University Press (1952).
3. A. Hurwitz, R. Courant, Vorlesungen über allgemeine Funktsionentheorie und elliptische Funktionen, Springer, Berlin (1964).

4. M. Toda, Introduction to Elliptic Functions, Nihon-Hyoron-sha, Tokyo (2001).
5. H. Umemura, Theory of Elliptic Functions — analysis on elliptic curves, University of Tokyo Press, Tokyo (2000).

GRADING RULES: Every solved homework contributes one or two points. The final grade equals

$$\min(10, \text{points obtained by the homework}).$$

COMMENTS: If the number of students registered to the course in advance (till June of 2019) is less than ten, the course will not be held.

Functional Analysis (Operator Theory)
a course for 3^{rd} year students and higher

LECTURER: A. Yu. Pirkovskii.

LEARNING LOAD: Spring term of 2018/19 A. Y., two classes per week, 6 credits per semester.

DESCRIPTION: Functional analysis studies infinite-dimensional vector spaces equipped with a norm (or, more generally, with a topology), operators between such spaces, and representations of algebraic structures on such spaces. The classical areas of Functional Analysis are the spectral theory of linear operators, the geometry of Banach spaces, distribution theory, operator algebra theory, etc. Among relatively new areas are noncommutative geometry à la Connes, operator space theory (a.k.a. «quantum functional analysis»), and locally compact quantum groups. Functional analysis has numerous applications in differential equations, harmonic analysis, representation theory, geometry, topology, calculus of variations, optimization, quantum physics, etc.

This course is a continuation of the course «Introduction to Functional Analysis» (fall 2019). We plan to discuss those aspects of functional analysis which deal with rather general classes of linear operators on Banach and Hilbert spaces. This means that we will not consider, for example, differential operators at all, because their theory can be well presented in a separate course only. Instead, we concentrate on those topics which emphasize the role of algebraic methods in functional analysis.

PREREQUISITES: Calculus, linear algebra, metric spaces, the Lebesgue integral, basics of functional analysis (Banach and Hilbert spaces, bounded linear operators)

SYLLABUS:

1. Topological vector spaces and duality.
2. Compact and Fredholm operators. The Riesz – Schauder theory. The general index theory.
3. Commutative Banach algebras. The Gelfand transform. The commutative Gelfand – Naimark theorem.
4. Spectral theory of normal operators on a Hilbert space. The spectral theorem.
5. Distributions (if time permits).

TEXTBOOKS:

1. A. Ya. Helemskii. Lectures and exercises in Functional Analysis. AMS, 2006.
2. V. I. Bogachev and O. G. Smolyanov. Real and Functional Analysis. RCD, 2011 (in Russian).
3. A. A. Kirillov and A. D. Gvishiani. Theorems and problems in Functional Analysis. Springer, 1982.
4. B. Simon. Operator Theory. (A comprehensive course in Analysis, Part 4). AMS, 2015.
5. M. Reed, B. Simon. Methods of Modern Mathematical Physics. 1. Functional Analysis. Academic Press, 1972.
6. W. Rudin. Functional Analysis. McGraw-Hill, 1991.
7. J. B. Conway. A course in Functional Analysis. Springer, 1990.
8. G. Murphy. C^*-algebras and operator theory. Academic Press, 1990.

9. R. Meise and D. Vogt. Introduction to Functional Analysis. Clarendon Press, 1997.

10. F. Treves. Topological vector spaces, distributions, and kernels. Academic Press, 1967.

GRADING RULES: final grade = $0.7 \times$ (cumulative grade) + $0.3 \times$ (exam grade).

cumulative grade = $0.5 \times$ (midterm grade) + $0.5 \times$ (exercise sheets grade).

The oral exam will be at the end of May and will include only the material of the 4th module.

The midterm exam (also oral) will be at the end of March and will include only the material of the 3rd module.

To get the maximum grade for the exercise sheets, you should solve 75% of all the exercises. If you solve more, you will earn bonus points.

You can also earn bonus points for working actively at the exercise classes and for solving «bonus exercises» (marked as «B» in the sheets).

Functional Analysis and Noncommutative Geometry
a seminar for 3rd year students and higher

ADVISOR: A. Yu. Pirkovskii.

LEARNING LOAD: two semesters of 2018/19 A. Y., one class per week, 3 credits per semester.

DESCRIPTION: The students who participate in the seminar give talks on functional analytic aspects of noncommutative geometry. Talks devoted to noncommutative algebraic geometry and to «pure» functional analysis (preferably with algebraic flavour) are also welcome. The topics of talks are usually taken from the literature, but sometimes the participants present their own results. Occasionally, talks are given by the seminar advisor or by an invited speaker.

PREREQUISITES: The participants are supposed to know basic algebra and functional analysis and to love any kind of geometry or topology.

SYLLABUS: This is not a syllabus in the usual sense, but is rather a selection of topics (some of which are quite large) which could vary according to the participant's taste.

1. Quantum bounded symmteric domains and noncommutative complex analysis in the spirit of L. L. Vaksman.
2. Strict deformation quantization (M. Rieffel et al.).
3. Deformations of C^*-algebras (in a broad sense).
4. Noncommutative complex analytic geometry (A. Polishchuk, A. Schwarz, P. Smith, M. Khalkhali, G. Landi, et al.).
5. An operator-theoretic approach to noncommutative complex analysis (W. Arveson, G. Popescu, et al.).
6. Noncommutative complex structures and positive Hochschild cocycles (A. Connes, M. Khalkhali, G. Landi, et al.).
7. Noncommutative integration, noncommutative L^p-spaces.
8. Noncommutative geometry (algebraic and analytic) of PI algberas.
9. Bivariant K-theory and bivariant periodic cyclic homology (G. Kasparov, J. Cuntz, R. Meyer, et al.).
10. C^*-superalgebras (P. Bieliavsky et al.).
11. DQ-modules (M. Kashiwara, P. Schapira).
12. Holomorphic functions of several free variables (J. Taylor, D. S. Kaliuzhnyi – Verbovetskyi, V. Vinnikov).
13. «Physical» aspects of noncommutative geometry (including Bost – Connes systems).

TEXTBOOKS:

1. A. Connes. Noncommutative geometry. Academic Press, 1994.
2. A. Connes, M. Marcolli. Noncommutative geometry, quantum fields and motives. AMS, 2008.
3. L. L. Vaksman. Quantum bounded symmetric domains. AMS, 2010.
4. M. A. Rieffel. Deformation quantization for actions of $\mathbb{R}^d$. Mem. Amer. Math. Soc. 106 (1993), no. 506.

5. J. Cuntz, R. Meyer, J. Rosenberg. Topological and bivariant K-theory. Birkhäuser, 2007.
6. D. S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi, V. Vinnikov. Foundations of free noncommutative function theory. AMS, 2014.
7. M. Kashiwara, P. Schapira. Deformation quantization modules. Astérisque No. 345 (2012).
8. K. A. Brown, K. R. Goodearl. Lectures on algebraic quantum groups. Birkhäuser, 2002.

GRADING RULES: To get a positive grade, you should give (at least) one talk at the seminar. The grade will depend on the quality of the talk.

HAMILTONIAN MECHANICS
a course for 3rd year students and higher

LECTURER: I. M. Krichever.

LEARNING LOAD: Fall term of 2018/19 A. Y., two classes per week, 6 credits per semester.

DESCRIPTION: This is one of the basic theoretical physics courses for students in their 3-–4 year of undergraduate studies and for Masters students. A core of mathematical methods of modern theory of Hamiltonian systems are concepts created in various branches of mathematics: the theory of differential equations and dynamical systems; the theory of Lie groups and Lie algebras and their representations; the theory of smooth maps of manifolds. Many modern mathematical theories, such as symplectic geometry and theory of integrable systems have arisen from problems of classical mechanics. That's why this course is recommended not only for those who plan to continue their studies in «Mathematical Physics» master program, but also for those who are planing to continue pure mathematical studies.

PREREQUISITES: No physics courses prerequisites.

SYLLABUS:

1. Lagrangian formalism: Least action principle; Euler -– Lagrange equations; first integrals and symmetries of action.
2. Basics of Hamiltonian formalism: phase space; Legendre transform; Poisson brackets and symplectic structure; Darboux thoerem, Hamiltonian equayions.
3. Examples: Geodesics on Lie groups. Mechanics of solid body and hydrodinamics of ideal fluid.
4. Separations of variables and integrability: Hamitonian -– Jacobi equations; canonical transformations. Moment map. Arnold -– Liouville integrable systems. Lax representation.

TEXTBOOKS:

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Курс теоретической физики, т.1, Механика. М.: Наука, 1988.
2. В. И. Арнольд. Математические методы классической механики. 3-е изд. М.: Наука, 1989.
3. O. Babelon, D. Bernard, M. Talon. Introduction to Classical Integrable Systems. CUP, 2003.

GRADING RULES: 0.3 (problem sheets + midterms) + 0.7 (final exam). The score is rounded to the nearest integer, half integer values are rounded up.

Introduction to Commutative Algebra
a course for 2nd year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

LECTURER: A. S. Khoroshkin.

LEARNING LOAD: Fall term of 2018/19 A. Y., two classes per week, 6 credits per semester.

DESCRIPTION: At its most basic level, algebraic geometry is the study of the geometry of solution sets of polynomial systems of equations. Classically, the coefficients of the polynomial equations are assumed to lie in an algebraically closed field. Considering more general coefficient rings, in particular rings of integers in number fields, one arrives at modern algebraic geometry and algebraic number theory. Commutative algebra provides the tools for answering basic questions about solutions sets of polynomial systems, such as finite generation of the system, existence of solutions in some extension of the coefficient ring, dimension and irreducible components, and smoothness and singularities.

PREREQUISITES: Basic courses given at the faculty of mathematics for the first 3 semesters, including (a) basic algebra (groups, rings, fields), (b) Linear algebra (tensor products), (3) Basic geometry

SYLLABUS:

- Rings, algebras, ideals and modules
- Noetherian rings
- Unique factorization domains
- Rings and modules of fractions
- Integral dependence and Noether's normalization theorem
- The going-up and going-down theorems
- Limits, colimits and tensor product
- Flat and projective modules
- Hilbert Nullstellensatz
- The spectrum of the ring
- Krull dimension and transcendence degree трансцендентности
- Primary decomposition
- Discrete valuation rings and Dedekind domains
- Dimension theory for noetherian rings
- Hilbert series

TEXTBOOKS:

- M. Reid, «Undergraduate commutative algebra.» Vol. 29. Cambridge University Press, 1995.
- M. Atiyah, «Introduction to commutative algebra.» Vol. 361. Westview press, 1994.

- G. Kemper. «A course in commutative algebra.» Vol. 256. Springer Science & Business Media, 2010.
- D. Eisenbud. «Commutative Algebra: With a View Toward Algebraic Geometry.» New York, NY: Springer-Verlag, 1999.

GRADING RULES: Your final grade is a weighted sum of

- Final written exam (50%),
- Written midterm (30%),
- Small tests during seminars (30%).

Introduction to complex dynamics and analytic theory of ordinary differential equations
a seminar for 3rd year students and higher

ADVISOR: A. A. Glutsyuk.

LEARNING LOAD: Module 3 of 2018/19 A. Y., two classes per week, 3 credits.

DESCRIPTION: Complex dynamics and analytic theory of ordinary differential equations are situated on crossing of many domains of contemporary mathematics. The analytic theory of ordinary differential equations and its global extension, the theory of holomorphic foliations were born in the first half of XX-th century, in studying the Painlevé equations and the second part of Hilbert 16-th Problem about limit cycles of *real* planar polynomial vector fields. Studying the 16-th Hilbert Problem led to a lot of important results in local dynamics, normal forms and global properties of holomorphic foliations that became classical. Now holomorphic foliations and complex dynamics are quickly developing areas on the crossing of several domains in mathematics, including dynamical systems, analysis, complex and Riemannian geometry, ergodic theory. For example, both foliations and holomorphic dynamics arise in classification problems in complex geometry and in some problems of mathematical physics. The course will present selected classical results on local dynamics, with an accent on moduli of analytic classification, Stokes phenomena and also applications of Stokes phenomena and holomorphic foliations in other domains of mathematics

PREREQUISITES: basic calculus, analysis of one complex variable, linear algebra, basic theory of ordinary differential equations

SYLLABUS:

- Holomorphic vector fields, singular points.
- Resonances. Non-resonant formal normal forms
- Analytic normal forms of singularities with linear parts in the Poincaré domain.
- Linear equations, Fuchsian singularities, normal forms.
- The Riemann – Hilbert problem.
- Irregular singularities. Stokes phenomena.
- Applications of the Stokes phenomena to real dynamics: model of Josephson effect.
- Resolution of singularities of two-dimensional holomorphic vector fields: Bendixon – Seidenberg theorem without proof.
- Saddle node singularities and their monodromy; parabolic germs of conformal mappings.
- Analytic classification of parabolic germs. Ecalle – Voronin moduli.
- Analytic classification of saddle-node singularities of holomorphic vector fields: Martinet–Ramis moduli.
- One-dimensional holomorphic foliations. Main conjectures on minimal sets and topology of leaves.
- Density of leaves of a generic foliation with an invariant line.
- A very new striking unexpectable result by Alvarez and Deroin: an example of structurally stable foliation on complex projective plane without dense leaves.
- Simultaneous uniformization of leaves.

TEXTBOOKS:

- Ilyashenko, Yu.S.; Yakovenko, S. Lectures on analytic differential equations. Graduate Studies in Mathematics, 86, AMS, 2008.
- Arnold, V.I. Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations. Second edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 250, Springer-Verlag, NY, 1988.

GRADING RULES: 0.3 (problem solutions) + 0.7 (final exam)

COMMENTS: The course will be given in February, March, April 2020

Introduction to Ergodic Theory
a seminar for 2nd year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

ADVISOR: M. L. Blank.

LEARNING LOAD: Fall term of 2018/19 A. Y., one class per week, 3 credits per semester.

DESCRIPTION: Is it possible to distinguish deterministic chaotic dynamics from a purely random and whether this question makes sense? Does irreversibility influence qualitative characteristics of the process? Ergodic theory studies these and other statistical properties of dynamical systems. Interest in this subject stems from the fact that «typical» deterministic dynamical systems (eg, differential equations) exhibit chaotic behavior: their trajectories look similar to the implementation of random processes. We begin with the classical results by Poincare, Birkhoff, Khinchin, Kolmogorov, and get to modern productions (including yet unresolved) problems. This is an introductory course designed for 2 – 4 bachelors and graduate students. Prior knowledge except for the course in mathematical analysis is not required (although it is desirable).

PREREQUISITES: calculus.

SYLLABUS:

- Dynamical systems: trajectories, invariant sets, simple and strange attractors and their classification, randomness.
- The action in the space of measures, transfer operator, invariant measures. Comparison with Markov chains.
- Ergodicity, Birkhoff ergodic theorem, mixing, CLT. Sinai – Bowen – Ruelle measures and natural/observable measures.
- Basic ergodic structures: direct and skew products, Poincare and integral maps, a natural extension and the problem of irreversibility.
- Ergodic approach to number theoretical problems.
- Entropy: metric and topological approaches.
- Operator formalism. Spectral theory of dynamical systems. Banach space of measures, random perturbations.
- Multicomponent systems: synchronization and phase transitions.
- Mathematical foundations of numerical simulations.

TEXTBOOKS: A. Katok, B. Hasselblatt. «Introduction to the modern theory of dynamical systems», 1995.

GRADING RULES: 0.4 (Cumulative assessment) + 0.6 (Exam). The cumulative assessment is determined by control, delivery of sheets and work at lectures and seminars. Round up.

Introduction to Frobenius algebras and mirror symmetry
a seminar for 2nd year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

ADVISOR: P. I. Dunin–Barkowski, A. A. Basalaev.

LEARNING LOAD: Spring term of 2018/19 A. Y., two classes per week, 6 credits per semester.

DESCRIPTION: *Frobenius algebra* is just an associative algebra with a unit equipped with a bilinear form and satisfying a certain simple condition called the Frobenius condition. Despite the notion of Frobenius algebras being very simple, it turns out that these objects play a profound role in many interesting areas and examples. One particular area where they naturally arise is the *singularity theory* which arises from studying cusps with behavior similar to the one of the curve $y^2 = x^3$ near $(x, y) = (0, 0)$ (compare this to the behavior of the curve $y^2 = x^3 + x^2$ near the same point).

In the present course we will start with introducing the basic concept of Frobenius algebra and discuss some examples and properties of these objects. Then we will discuss the basics of singularity theory and the relation of Frobenius algebras to this theory. Along the way we will mention the relation of all this to physics (in particular, we will discuss the so-called «two dimensional topological quantum field theories» which sound much scarier than they really are). Towards the end of the course we will touch the concept of F-manifolds, providing all the necessary preliminaries.

This course is aimed to be completely accessible for all second-year students and above.

PREREQUISITES: Algebra I, Geometry I

SYLLABUS:

1. Algebras with a pairing, Frobenius algebras. Equivalent formulations, uniqueness of the pairing, restrictions arising from the Frobenius property.
2. Examples of non-Frobenius associative commutative algebras. Formal description of Frobenius algebras in terms of the unit and the counit and the multiplication tensor. Corresponding graphs and cobordisms description.
3. Frobenius algebras coming from the singularity theory: ADE examples.
4. Root systems of the ADE type, Coxeter groups, Frobenius algebra structure on the space of invariant polynomials.
5. Frobenius algebras arising from the cohomology of manifolds. $\mathbb{CP}^n$ examples.
6. Atiyah's axioms of 2D TQFTs. Relation to physics.
7. Mirror symmetry as an isomorphism of Frobenius algebras, certain simple examples.
8. Manifolds with a product. Associative and commutative case, F-manifolds.
9. F-manifolds arising from deformations of singularities: ADE examples.

TEXTBOOKS:

- J. Kock, «Frobenius Algebras and 2d Topological Quantum Field Theories», Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

- C. Hertling, «Frobenius Manifolds and Moduli Spaces for Singularities», Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- S. M. Natanzon, «Geometry of two-dimensional topological field theories», MCCME, Moscow, 1998.
- V. I. Arnold, V. V. Goryunov, O. V. Lyashko, V. A. Vasil'ev, «Singularity Theory I», Springer, 1998.

GRADING RULES: Grading is based on the following four marks:

- $S \in [0,4]$ – the total mark for the problem sheets, a real number between 0 and 4,
- $C \in [0,4]$ – the total mark for the tests (small written tests given every few seminars), a real number between 0 and 4,
- $T \in [0,3]$ – the mark for a 30-minute talk given at one of the seminars, a real number between 0 and 3,
- $E \in [0,5]$ – the final oral exam mark, a real number between 0 and 5.

The total score for the course is computed according to the following formula:

$$\min(10, \lceil S + C + T + E \rceil),$$

where $\lceil\rceil$ stands for rounding up. If for any student $\min(10, \lceil S + C + T \rceil) \geqslant 8$ already before the final exam, this student can take this value as his or her final score and skip the exam.

Introduction to Functional Analysis
a course for 2^{nd} year students and higher

LECTURER: A. Yu. Pirkovskii.

LEARNING LOAD: Fall term of 2018/19 A. Y., two classes per week, 6 credits per semester.

DESCRIPTION: Functional analysis studies infinite-dimensional vector spaces equipped with a norm (or, more generally, with a topology), operators between such spaces, and representations of algebraic structures on such spaces. The classical areas of Functional Analysis are the spectral theory of linear operators, the geometry of Banach spaces, distribution theory, operator algebra theory, etc. Among relatively new areas are noncommutative geometry à la Connes, operator space theory (a.k.a. «quantum functional analysis»), and locally compact quantum groups. Functional analysis has numerous applications in differential equations, harmonic analysis, representation theory, geometry, topology, calculus of variations, optimization, quantum physics, etc.

In this an introductory course, we plan to cover the very basics of Functional Analysis (the «irreducible minimum») only.

PREREQUISITES: Calculus, linear algebra, metric spaces, the Lebesgue integral

SYLLABUS:

1. Normed and Banach spaces, bounded linear maps.
2. Hilbert spaces.
3. The Hahn-Banach Theorem, the Open Mapping Theorem, the Uniform Boundedness Principle.
4. Basic duality theory.
5. Elementary spectral theory.
6. Compact operators. The Hilbert-Schmidt Theorem.

TEXTBOOKS:

1. A. Ya. Helemskii. Lectures and exercises in Functional Analysis. AMS, 2006.
2. V. I. Bogachev and O. G. Smolyanov. Real and Functional Analysis. RCD, 2011 (in Russian).
3. A. A. Kirillov and A. D. Gvishiani. Theorems and problems in Functional Analysis. Springer, 1982.
4. B. Simon. Real Analysis. (A comprehensive course in Analysis, Part 1). AMS, 2015.
5. B. Simon. Operator Theory. (A comprehensive course in Analysis, Part 4). AMS, 2015.
6. M. Reed, B. Simon. Methods of Modern Mathematical Physics. 1. Functional Analysis. Academic Press, 1972.
7. W. Rudin. Functional Analysis. McGraw-Hill, 1991.
8. J. B. Conway. A course in Functional Analysis. Springer, 1990.

GRADING RULES: final grade $= 0.7 \times$ (cumulative grade) $+ 0.3 \times$ (exam grade), where cumulative grade $=$ $= 0.5 \times$ (midterm grade) $+ 0.5 \times$ (exercise sheets grade).

The oral exam will be at the end of December and will include only the material of the 2nd module.

The midterm exam (also oral) will be at the end of October (or at the beginning of November) and will include only the material of the 1st module.

To get the maximum grade for the exercise sheets, you should solve 75% of all the exercises. If you solve more, you will earn bonus points.

You can also earn bonus points for working actively at the exercise classes and for solving «bonus exercises» (marked as «B» in the sheets).

INTRODUCTION TO GALOIS THEORY
a course for 2^{nd} year students and higher

LECTURER: C. Brav.

LEARNING LOAD: Spring term of 2018/19 A. Y., two classes per week, 6 credits per semester.

DESCRIPTION: Galois theory is the study of roots of polynomials and their symmetries in terms of Galois groups. As the algebraic counterpart of the fundamental group of topology, the Galois group is an essential object in algebraic geometry and number theory.

PREREQUISITES: Basic algebra: groups, rings, linear algebra over a field.

SYLLABUS:

- Review of polynomial rings and more general principal ideal domains.
- Extensions of fields, algebraic and transcendental.
- Splitting fields of polynomials and Galois groups.
- The fundamental theorem of Galois theory.
- Computing Galois groups.
- Applications.

TEXTBOOKS: J. S. Milne, Fields and Galois Theory, https://www.jmilne.org/math/CourseNotes/ft.html.

GRADING RULES: 40% mid-term; 60% final. Final mark: round percent/10 to nearest integer.

Introduction to Mathematical Statistics
a course for 3rd year students and higher

LECTURER: A. S. Skripchenko.

LEARNING LOAD: Module 2 of 2018/19 A. Y., one class per week, 2 credits.

DESCRIPTION: The main goal of mathematical statistics is an adaptation of the theoretical probabilistic models to some practical problems in economics, physics, medicine, social sciences. Typically the precise distribution or random process that describes some phenomenon is not known; however, some information can be extracted from the series of observations or repeated experiments; this data is used to select the most appropriate model. We will discuss two most frequent classes of problems in this area, the parameters estimation and the hypothesis testing.

PREREQUISITES: The most basic part of probability theory: distributions of random variables, mathematical expectations and variances for random variables, statement of the central limit theorem (knowledge of the proof is not required). This material is covered by the first module of the mandatory course «Introduction to Probabilities», so 3rd year students will be ready for this course.

SYLLABUS:

- Statistical models, samples, descriptive statistics. Empirical approach: empirical distribution and Glivenko – Cantelli theorem.
- Parametric statistics: estimations and their main properties. Unbiased estimators. Efficient estimators. Cramer – Rao bound. Consistent estimators. Sufficient statistics and Fisher – Neumann factorization theorem. Rao – Blackwell theorem. Confidence intervals.
- Statistical hypothesis testing. Common test statistics. Null hypothesis statistical significance testing. Neumann – Pearson lemma and the most powerful test at the given significance level.

TEXTBOOKS:

- David Freedman, Robert Pisani, Roger Purves, «Statistics».
- Victor M. Panaretos, «Statistics for Mathematicians: a Rigorous First Course».
- М. Лагутин, «Наглядная математическая статистика».

COMMENTS: It is a short (1-module) course given in the second module (November–December). The course is strongly recommended for the students who are planning to include econometrics and related subjects in their future individual plans.

GRADING RULES: The only grading component is the exam, which has the following form. Students are given a home assignment, which should be submitted a few days before the exam. The exam is an oral discussion of the problems solved in the homework, and of the corresponding topics of the theory (the points given to each solution can be reduced in case of poor knowledge of statements and definitions used). The formula producing the final grade from the sum of points (rounding included) is published along with the assignment; a student should solve approximately 70-80% of the assignment to achieve the grade «10», and 30–40% to achieve «4».

Introduction to Riemann Surfaces
a course for 2^{nd} year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

LECTURER: S. M. Lvovski.

LEARNING LOAD: Spring term of 2018/19 A. Y., two classes per week, 6 credits per semester.

DESCRIPTION: The aim of the course is to demonstrate how some of the key ideas of algebraic geometry work, using the approach that does not reaquire a hard technical introduction

PREREQUISITES: Complex analysis, Topology-1, Calculus on manifolds (rudiments)

SYLLABUS:

1. Definitions. Compact Riemann surfaces associated to algebraic equations.
2. Differentials, residues, divisors. Genus of a compact Riemann surface.
3. Compact Riemann surfaces associated to smooth and nodal plane curves. Poincaré residue.
4. Riemann's existence theorem (without proof). Riemann – Roch theorem.
5. Linear systems and line bundles.
6. Canonical curves. Castelnuovo – De Franchis theorem.
7. Jacobian variety. Abal and Jacobi theorems.
8. Theta divisor. Torelli theorem.

TEXTBOOKS:

1. R. C. Gunning. Lectures on Riemann Surfaces.
2. Ph. Griffiths, J. Harris. Proinciples of Algebraic Geometry, Chapter 2

GRADING RULES: 0.4 (grade for the midterm exam) + 0.6 (grade for the final exam) . Non-integer grades will be rounded up.

INTRODUCTION TO THE THEORY OF INTEGRABLE EQUATIONS
a seminar for 3rd year students and higher

ADVISOR: A. K. Pogrebkov.

LEARNING LOAD: Fall term of 2018/19 A. Y., one class per week, 3 credits per semester.

DESCRIPTION: Creation and development of the theory of integrable equations is one of main achievements of the mathematical physics of the fall of the previous century. In our times ideas and results of this theory penetrate in many branches of the modern mathematics: from string theory to the theory of Riemann surfaces.

PREREQUISITES: analysis of one and several real variables, theory of complex variable, linear algebra, theory of linear partial differential equations.

SYLLABUS: Commutator identities on associative algebras; $\bar{\partial}$-problem and dressing operators; Lax pairs; Kadomtsev–Petviashvili equation; Soliton solutions of the KP equation; Two-dimensional reduction: KdV equation; Details of the Inverse scattering transform for KdV equation; Soliton solutions of the KdV equations, their properties; dispersion relation and integrals of motion; IST as canonical transformation.

TEXTBOOKS: В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, «Теория солитонов: Метод обратной задачи», М., «Наука», 1980; Francesco Calogero and Antonio Degasperis, «Spectral transform and solitons: Tools to solve and investigate nonlinear evolution equations», vol. 1, N.-Holland, Amsterdam, 1982.

GRADING RULES: The final grade is computed as 0,5 (cumulative grade) + 0,5 (final exam grade) (Unless stated otherwise, all grades are rounded to the nearest integer (half-integers are rounded upwards). The cumulative grade is proportional to the number of problems solved so that 10 corresponds to 75% of all problems + bonuses for active participation.

Introduction to the theory of random processes
a seminar for 3rd year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

ADVISOR: M. L. Blank.

LEARNING LOAD: Spring term of 2018/19 A. Y., two classes per week, 6 credits per semester.

DESCRIPTION: The course is a continuation of the standard course in probability theory (associated mainly with combinatorics) and is intended for an initial introduction to the theory of random processes. Special attention is paid to the connection of this theory with functional analysis and the general measure theory. The course is aimed at bachelors 2–4 courses, undergraduates and graduate students.

PREREQUISITES: calculus, probability theory

SYLLABUS:

- The concept of a random process.
- Elements of random analysis.
- Correlation theory of random processes.
- Markov processes with discrete and continuous time.
- Wiener and Poisson processes.
- Stochastic integral. Ito's formula.
- (sub/super) martingales.
- Infinitesimal semigroup operator.
- Stochastic stability of dynamical systems.
- Large deviations in Markov processes and chaotic dynamics.
- Nonlinear Markov processes.

TEXTBOOKS:

- D. Stirzaker. Elementary probability, Cambrige University Press, 2003.
- N. V. Krylov. Introduction to the theory of random processes. AMS. V.43, 2002.

GRADING RULES: 0.4 (cumulative assessment) + 0.6 (exam). The cumulative assessment is determined by control, delivery of sheets and work at lectures and seminars. Round up.

Lie Groups and Lie Algebras
a course for 3rd year students and higher

LECTURER: G. I. Olshanski.

LEARNING LOAD: Fall term of 2018/19 A. Y., two classes per week, 6 credits per semester.

DESCRIPTION: We shall begin with the basics of the theory of Lie groups and Lie algebras. Then we shall provide an accessible introduction to the theory of finite-dimensional representations of compact classical groups on the example of the unitary groups U_n.

PREREQUISITES: Good knowledge of linear algebra; basics of multivariable calculus; understand the definition of topological space, smooth manifold, tangent space; some knowledge of the basics of representation theory of finite groups (not mandatory, but desirable).

SYLLABUS: Definition of Lie group. Linear Lie groups. Subgroups of Lie groups. Exponential map. Definition of Lie algebra. Connections between Lie groups and Lie algebras. Universal enveloping algebra of a Lie algebra. Its center. Symmetric algebra of a Lie algebra. The Poincaré – Birkhoff – Witt theorem. Representations of $\mathfrak{sl}(2)$. Haar measure on a Lie group. Radial part of Haar measure on U_n. Weyl's formula for characters.

TEXTBOOKS: William Fulton and Joe Harris, Representation theory (Russian translation available). Jacques Faraut, Analysis on Lie groups. An introduction.

GRADING RULES: Homework Assignments (activity weight 0.5); Midterm Exam (activity weight 0.1); Final Exam (activity weight 0.4

MARKOV CHAINS
a course for 2^{nd} year students and higher

LECTURER: A. Dymov.

LEARNING LOAD: Fall term of 2018/19 A. Y., one class per week, 3 credits per semester.

DESCRIPTION: Markov chains form the simplest class of random processes for which the future does not depend on the past but depends only on the present state of the process. Being rather simple, at the same time Markov chains have deep and very beautiful mathematics. They are known as probably the most important class of random processes, in particular, because of the numerous applications in mathematics, physics, computer science, biology, economics, etc. Indeed, once a stochastic process is given, it is natural to simplify it by assuming that the future does not depend on the past, and often this approximation works well. The present course is the introduction to the theory of Markov chains. It will concern with their most important properties and the most known applications. The course is aimed at the 3rd and 4th year students, but is also possible for 1st and 2nd year students. The only required knowledge is the basic course of analysis and linear algebra.

PREREQUISITES: Analysis, linear algebra

SYLLABUS:

1. Markov chains with finite number of states.
2. Examples.
3. Stationary states and their existence.
4. Ergodic theorem for Markov chains with ergodic transition probability matrix.
5. Applications of the ergodic theorem. The law of large numbers for Markov chains. The Google's PageRank.
6. Perron–Frobenius theorem.
7. Topological structure of Markov Chains.
8. Periodic Markov chains.
9. Aperiodic Markov chains. Ergodic theorem for irreducible aperiodic Markov chains.

TEXTBOOKS:

1. W. Feller, An introduction to probability theory and its applications, Vol. 1, 3rd ed., Wiley (1968).
2. B. V. Gnedenko, Theory of probability, 6th ed., Boca Raton, FL: CRC Press (1998).
3. J. G. Kemeny, J. L. Snell, Finite Markov chains, Springer-Verlag (1976).
4. L. B. Koralov, Ya. G. Sinai, Theory of probability and random processes, 2nd ed., Springer (2012).
5. A. N. Shiryaev, Probability, 2nd ed., Springer, New-York (1995).

GRADING RULES: $(C + E)/2$, where C denotes the current grade and E denotes the exam grade.

Modern Dynamical Systems
a seminar for 3rd year students and higher

ADVISOR: A. S. Skripchenko, A. V. Zorich.

LEARNING LOAD: Spring term of 2018/19 A. Y., two classes per week, 6 credits per semester.

DESCRIPTION: Dynamical systems in our course will be presented mainly not as an independent branch of mathematics but as a very powerful tool that can be applied in geometry, topology, probability, analysis, number theory and physics. We hope to arrive at the end of the course to the most recent advances in dynamics and geometry and to present (at least informally) some of results of A. Avila, A. Eskin, M. Kontsevich, M. Mirzakhani, G. Margulis.

PREREQUISITES: We expect our audience to be familiar with basic differential geometry, basic algebraic topology and basic measure theory. Also, since ergodic theory is very partially presented in our course, we recommend to people who are interested in dynamical systems to take an independent course of ergodic theory.

SYLLABUS:

- Geometry and Dynamics: introduction to hyperbolic geometry. Möbius transformations. Fuchsian groups. Geodesics on surfaces of negative curvature. The geodesic flow and its properties. Geodesic flow on modular curve as a continued fraction map. Teichmüller space. Teichmüller geodesic flow. Counting of simple closed geodesics: results by M. Mirzhakhani.
- Dynamics and Topology: Interval exchange transformations (IET) as natural generalizations of continued fractions. Measured foliations on surfaces and their key ergodic properties. Multiplicative ergodic theorem. Topological interpretation of Lyapunov exponents. Sums of Lyapunov exponents as uniform bounds for degrees of holomorphic subbundles. Anosov and Pseudoanosov diffeomorphisms of surfaces. Introduction to hyperbolic dynamics (Markov partitions, invariant measures etc).
- Dynamics and Number Theory. Homogeneous dynamics and its applications to famous conjectures in number theory, such as Oppenheim conjecture (solved) and Littlewood conjecture (still open). Results of G. Margulis.
- Dynamics and Analysis. Transfer operator and its spectral gap. Perron-Frobenius theorem and its generalization by D. Ruelle, zeta-function and its interpretation in terms of transfer operator.

TEXTBOOKS:

- F. Dal'bo, Geodesic and Horocyclic trajectories, Springer Urtext (2011).
- S. Katok, Fuchsian groups, University of Chicago Press, Chicago and London, 1992 (Russian translation: Faktorial Press, Moscow, 2002)
- W. Thurston, Geometry and topology of three-manifolds, Princeton University Press, 1997 (Russian translation: MCCME, 2001)
- Ya. Sinai, Introduction to ergodic theory Princeton University Press, 1977 (Russian original: Yerevan University Press, 1973)
- M. Viana, Ergodic Theory of Interval Exchange Maps, Revista Mathematica Complutense 19:1 (2006), 7–100.
- J.-C. Yoccoz, Interval exchange maps and translation surfaces, lecture notes available from http://www.college-de-france.fr/media/jean-christophe-yoccoz/UPL15305_PisaLecturesJCY2007.pdf

- G. Margulis, Number theory and homogeneous dynamics, lecture notes are available from http://jointmathematicsmeetings.org/meetings/national/jmm/margulis_colloq_lect_08.pdf
- D. Ruelle, Chaotic Evolution and Strange Attractors, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

GRADING RULES: There is only a cumulative mark, no final exam. Cumulative mark is formed by home assignments and oral presentations based on recent and rather advanced research papers in dynamical systems.

Quantum integrable systems in formulas and pictures
a seminar for 3rd year students and higher

ADVISOR: Kh. S. Nirov.

LEARNING LOAD: Fall term of 2018/19 A. Y., one class per week, 3 credits per semester.

DESCRIPTION: Within the framework of the theory of quantum integrable systems, many powerful methods have been developed to study their underlying mathematical structures and possible physical implications. They are quite sophisticated and, basically, they can be divided into three sections: algebraic, analytical and graphical. Here, the algebraic methods are based on the quantum group structures with which the integrable model is associated; the analytical methods imply analysis of properties of the integrability objects as functions of the spectral parameter, their asymptotic behavior with respect to parameters such as an external magnetic field, temperature, or other parameters of this type; the graphical methods stem from the famous triangle representation of the Yang–Baxter equation. As a rule, the most effective is a certain combination of these methods, when each of them is applied to solve a specific task to achieve a common goal. We will present a systematic discussion of these three main approaches to the investigation of quantum integrable systems. Various useful objects and equations will be given in both algebraic and graphical forms. As the basic example, we will specialize our discussion to quantum integrable systems associated with the quantum loop algebra of lowest rank, on which the «classical» six-vertex model and the corresponding XXZ spin chain are based.

PREREQUISITES: The course is designed for 3rd and 4th year undergraduate students, masters and PhD students. Although some necessary materials will be given during the course, for a better understanding of it, knowledge of the basics of the theory of the Kac – Moody Lie algebras and their representations would be helpful. It is also desirable to have a primary idea about Hopf algebras.

SYLLABUS:

- Loop algebras. Quantum groups. Universal R-matrix. Representations of quantum loop algebras.
- Universal integrability objects. Transfer- and Q-operators. Commutativity.
- Functional relations between integrability objects. TQ-, TT-and QQ-relations.
- R-operators. Unitarity and crossing. Graphical description of open chains.
- Basic example in detail: quantum loop algebra $\mathrm{U}_q(\mathcal{L}(\mathfrak{sl}_2))$.

TEXTBOOKS:

1. R. J. Baxter, «Exactly solved models in statistical mechanics», Academic Press, London, 1982, ISBN 0-12-083180-5
2. V. Chari, A. Pressley, «A Guide to Quantum Groups», Cambridge University Press, 1994, ISBN 0-521-43305-3
3. M. Jimbo, T. Miwa,«Algebraic Analysis of Solvable Lattice Models?, Regional conference series in mathematics, AMS, 1995, ISSN 0160-7642, No.85
4. A.Klimyk, K.Schmüdgen, «Quantum Groups and Their Representations», Springer, 1997, ISBN-10:3642646018
5. H. Boos, F. Göhmann, A. Klümper, Kh. S. Nirov, A. V. Razumov, «Universal R-matrix and functional relations», Rev. Math. Phys. 26, No. 4 (2014) 1430005 (66pp.)

6. Kh. S. Nirov, A. V. Razumov, «Vertex models and spin chains in formulas and pictures», Preprint arXiv:1811.09401 [math-ph] (62pp.)

GRADING RULES: You will collect cumulative score C (estimated by 10 points). If $C \geqslant 8$, then the resulting mark $R = C$. If $C < 8$, then the written exam must be presented (estimated from 10 points), and the resulting mark $R = (C + E)/2$, where E is the exam mark, rounded off by the standard rules.

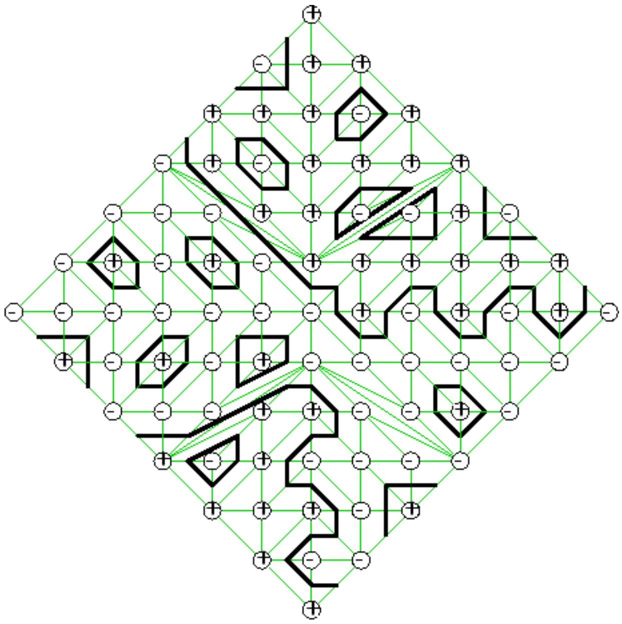
Real algebraic and toric geometry
a seminar for 3rd year students and higher

ADVISOR: A. I. Esterov.

LEARNING LOAD: Spring term of 2018/19 A. Y., one class per week, 3 credits per semester.

DESCRIPTION: This is an introduction to real algebraic geometry (1st module) and toric varieties (2nd module). Although the two topics are formally independent, the first one provides a natural context for the second.

The first module will be devoted to Hilbert's 16th problem for algebraic curves, which was one of the starting points for real algebraic geometry. The problem asks for the topological classification of smooth plane real algebraic curves of a given degree. Hilbert himself solved the problem up to degree 6 modulo one elusive topological type, whose existence was proved only 70 years later. Our aim is Viro's patchworking theorem, which allows to construct algebraic curves of a given degree with prescribed topology. For example, the here is the patchworking construction for the aforementioned elusive curve:



The second module will be devoted to toric varieties — certain algebraic varieties that can be assigned to integer polytopes. This correspondence between algebraic and geometric objects turns out to be profitable for both fields of study. For instance, on the polyhedral side, it solves the Upper bound conjecture regarding the number of faces of a simple polytope, while, on the algebro-geometric side, it produces the theory of Newton polytopes and provides the technique behind Viro's patchworking.

PREREQUISITES: Linear algebra and point-set topology. Familiarity with smooth manifolds and algebraic sets is a plus.

SYLLABUS:

- Hilbert's 16th problem and Harnack's inequality
- Viro's patchworking
- Real and complex projective toric varieties
- Newton polytopes and tropical compactifications

- Kouchnirenko–Bernstein formula

TEXTBOOKS:

- V. Kharlamov and O. Viro, Easy reading on topology of real plane algebraic curves
- O. Viro, Patchworking Real Algebraic Varieties
- D. Cox, What is a Toric Variety?
- G. Ewald, Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry

GRADING RULES: The lecture notes contain certain problems. Three days before the final exam, every student is given five of these problems at random. The student is then expected to write down the solutions and defend them at the oral exam. The final grade equals the final exam grade.

REPRESENTATIONS AND PROBABILITY
a seminar for 3rd year students and higher

ADVISORS: A. I. Bufetov, A. Dymov, A. V. Klimenko, M. Mariani, G. I. Olshanski.

LEARNING LOAD: two semesters of 2018/19 A. Y., one class per week, 3 credits per semester.

DESCRIPTION: The seminar is mostly aimed to 3–4 th year bachelor students, as well as master and PhD students. Senior participants are expected to deliver a talk on the seminar. The seminar topics are the mix of modern results in areas related to representations and probability theory, and older areas, which are prerequisites to the former, as well as keep their own value.

PREREQUISITES: Standard courses of calculus, algebra, and probability. Semesters can be taken independently.

SYLLABUS: Tentative topics for fall semester:

- Hyperbolic groups and ergodic theory of their actions.
- Determinantal point processes. Results connecting them with Markov chains.
- Ergodic behaviour of Markov chains with continuous state space.
- Continuous-time Markov chains and their asymptotic behavior. Combinatorial representations of invariant measures.
- Potential theory for Markov chains and applications to Statistical Physics.

Tentative topics for spring semester:

- Classical representations theory.
- Representations of infinite-dimensional groups
- Their connections with algebraic combinatorics (symmetric functions), classical analysis (orthogonal polynomials) and probability theory (point processes and Markov dynamics).

TEXTBOOKS:

[1] I. I. Gikhman, A. V. Skorokhod, Introduction to the theory of random processes, Dover, 1996. (перевод с русского: И. И. Гихман, А. В. Скороход. Введение в теорию случайных процессов. М.: 1977.)

[2] S. Kuksin, A. Shirikyan, Mathematics of two-dimensional turbulence, Cambrige University Press, 2012.

[3] A. Gaudilliere, Condenser physics applied to Markov chains — A brief introduction to potential theory, arXiv:0901.3053

[4] A. Borodin and G. Olshanski, Representations of the infinite symmetric group. Cambridge University Press, 2017.

GRADING RULES: The only grading component is the result of the final exam. The exam is an oral discussion of the problems from the specified list and of the corresponding topics of the theory. The list of problems is given 1-2 weeks before the exam; along with the problems it specifies the formula for the exam grading. Also, the student who made a talk on the seminar can get the grade «10» before the exam.

COMMENTS: Seminar is planned to be held at the Steklov Mathematical Institute in Fall semester and at HSE in Spring semester.

SMOOTH STRUCTURES ON MANIFOLDS
a seminar for 3rd year students and higher

ADVISOR: A. S. Tikhomirov.

LEARNING LOAD: Fall term of 2018/19 A. Y., two classes per week, 6 credits per semester.

DESCRIPTION: The smooth topology of four-dimensional manifolds is unique in the sense that it provides phenomena having no analogues neither in smaller, nor in higher dimensions. For instance, on many four-manifolds there were found an infinite, and on $\mathbb{R}^4$ even uncountable number of smooth structures. These phenomena were invented in 80-90-ies in the works of S.Donaldson, C. Taubes and many other geometers in connection with the application of methods of modern differential geometry to four-dimensional topology. This is a new area of mathematics lying at the junction of global analysis and gauge theory which is related to the Yang – Mills equations. Their solutions — the so-called instantons — lead to new invariants of smooth structures on four- manifolds. In this course we give an introduction to the invariants of smooth structures related to instantons and show how they work in four-dimensional topology.

PREREQUISITES: Standard courses of linear algebra and geometry are required. Familiarity with basic notions of topology and differential geometry like topological and smooth manifold, homology groups, tangent bundle, differential forms and integration on manifolds is desirable.

SYLLABUS:

1. Smooth structures on topological manifolds.
2. Vector and principal bundles. Connections
3. Curvature and characteristic classes
4. The space of connections
5. The Yang – Mills equations and the moduli space
6. Compactness and gluing theorems
7. Definite intersection forms.
8. The Donaldson polynomial invariants
9. The connected sum theorem
10. The Kobayashi – Hitchin correspondence
11. Smooth structures on complex algebraic surfaces

TEXTBOOKS:

1. Д. Фрид, К. Уленбек. Инстантоны и четырехмерные многообразия. Москва, Мир, 1988.
2. C. H.Taubes. Differential Geometry Bundles, Connections, Metrics and Curvature. Oxford Univ. Press, 2011.
3. S. K. Donaldson, P.B.Kronheimer. The Geometry of Four-Manifolds. Oxford, Clarendon Press, 1990.
4. R. Friedman, W. Morgan. Gauge Theory and the Topology of Four-Manifolds. IAS/Park City Math. Series, Vol. 4, 1997.

GRADING RULES: 0,3 (home tasks) + 0,2 (midterm) + 0,5 (final exam).

SYMMETRIC FUNCTIONS
a course for 2nd year students and higher

LECTURER: E. Yu. Smirnov.

LEARNING LOAD: Fall term of 2018/19 A. Y., two classes per week, 6 credits per semester.

DESCRIPTION: The theory of symmetric functions is one of the central branches of algebraic combinatorics. Being a rich and beautiful theory by itself, it also has numerous connections with the representation theory and algebraic geometry (especially geometry of homogeneous spaces, such as flag varieties, toric and spherical varieties). In this course we will mostly focus on the combinatorial aspects of the theory of symmetric functions and study the properties of Schur polynomials. In representation theory they appear as characters of representations of GL_n; they are also closely related with the geometry of Grassmannians. The second half of the course will be devoted to Schubert polynomials, a natural generalization of Schur polynomials, defined as «partially symmetric» functions. Like the Schur functions, they also have a rich structure and admit several nice combinatorial descriptions; geometrically they appear as representatives of Schubert classes in the cohomology ring of a full flag variety. Time permitting, we will also discuss K-theoretic (non-homogeneous) analogues of Schur and Schubert polynomials.

PREREQUISITES: Standard courses of algebra and discrete mathematics. Some knowledge of representation theory of symmetric and general linear groups is not required, but helpful

SYLLABUS:

1. Symmetric polynomials. The ring of symmetric functions. Bases of the ring of symmetric functions: elementary, complete, monomial symmetric functions, power sums. Transition formulas between these bases.

2. Schur functions. Algebraic definition. Jacobi-Trudi formula. Combinatorial definition, equivalence with the algebraic definition. Young tableaux.

3. Pieri rule. Kostka numbers. Enumeration of semistandard and standard Young tableaux, hook length formula.

4. Applications to combinatorics: enumerating plane partitions. MacMahon formula.

5. Enumeration of massifs (after Danilov and Koshevoy). Dense massifs. RSK-correspondence.

6. Multiplication of Schur functions. Littlewood–Richardson rule. (*) Knutson–Tao puzzles.

7. Symmetric group, its Coxeter presentation. The Bruhat order. The Lehmer code and the essential set of a permutation.

8. «Partially symmetric» polynomials. Divided difference operators. Schubert polynomials.

9. Properties of Schubert polynomials. Monk's formula, Lascoux transition formula.

10. Combinatorial presentation of Schubert polynomials. Pipe dreams. Positivity. Fomin–Kirillov theorem.

11. Flagged Schur functions, determinantal formulae.

12. (*) Generalizations: double Schubert polynomials, Stanley symmetric functions, Grothendieck polynomials.

The topics marked with (*) will be covered if the time and the enthusiasm of the audience permits.

TEXTBOOKS:

1. William Fulton. Young tableaux, With Applications to Representation Theory and Geometry. CUP, 1997 (Russian translation available)
2. Laurent Manivel. Fonctions symétriques, polynômes de Schubert et lieux de dégénérescence. Société Mathématique de France, 1998. (English translation available)
3. Ian G. Macdonald. Symmetric functions and Hall polynomials. 2nd edition. Clarendon Press, 1998. (An expanded Russian translation of the 1st edition available)
4. Richard Stanley. Enumerative combinatorics, vol.2. CUP, 1999 (Russian translation available).

GRADING RULES: There will be two written exams: the midterm exam at the end of the first quarter and the final exam, counted as 40% and 60% towards the final grade, respectively. Both exams are graded out of 10 points. The final grade is the weighted average, rounded to the nearest integer.