

Задачи к 17.05.

- (1) Пусть X гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$, $a \in X$ и в $\mathbb{P}^n$ лежит некоторое линейное подпространство $\mathbb{P}^m$ ($m < n$), проходящее через точку a . Тогда $X \cap \mathbb{P}^m$ является гиперповерхностью в $\mathbb{P}^m$, и мы можем рассмотреть поляры $P_a X$ в $\mathbb{P}^n$ и $P_a(X \cap \mathbb{P}^m)$ в $\mathbb{P}^m$. Объясните, почему $P_a(X \cap \mathbb{P}^m) = P_a X \cap \mathbb{P}^m$.
- (2) Пусть X неособая кривая степени d в $\mathbb{P}^2$. Докажите, что множество касательных к X является кривой на двойственной плоскости $\mathbb{P}^2$. Она называется двойственной кривой и обозначается $\check{X}$. Какова ее степень? Что меняется в случае гиперповерхности в $\mathbb{P}^n$? Если X имеет особенности, то $\check{X}$ определяется как замыкание множества касательных к неособым точкам.
- (3) Пусть X гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$ степени d , заданная уравнением $F(x_0 : \dots : x_n) = 0$. Рассмотрим пространство W_F форм степени $d-1$, состоящее из форм вида $\sum a_i \frac{\partial F}{\partial x_i}$, т.е. пространство уравнений всех поляр. Объясните, почему отображение линейным рядом W_F (оно называется отображением линейным рядом поляр) естественно рассматривать как отображение из $\mathbb{P}^n$ в $\check{\mathbb{P}}^n$. Его называют отображением линейным В каких точках это отображение не определено? Покажите, что образом X при этом отображении является $\check{X}$.
- (4) Покажите, что отображение линейным рядом поляр является биекцией (вне X) в следующих двух случаях:
 - а) X — декартов лист. Найдите $\check{X}$.
 - б) X — кубическая гиперповерхность, заметаемая хордами поверхности Веронезе в $\mathbb{P}^5$. Найдите $\check{X}$.
- (5) Докажите, что $\check{\check{X}} = X$. Заметьте, что это не проективное, а локальное утверждение, его можно проверять в окрестности степени d одной точки!
- (6) Докажите, что если точка a кривой X степени d является точкой перегиба, то полярная коника $P_{a^{d-2}} X$ особа.
- (7) Докажите, что пересечение кривой X с ее гессианом $\text{He } X$ есть в точности объединение множества особенностей X и множества ее точек перегиба. Гессиан $\text{He } X$ задается уравнением $\det \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right) = 0$.
- (8) Докажите, что прямая, соединяющая две точки перегиба кубической кривой, пересекает ее в третьей точке перегиба.