Материалы к семинарам по матанализу (четвёртый семестр)

15, 16 и 17-я недели (29.04 — 24.05.2019)

Примерные задачи семинаров

Основные функции

Напомним, что *финитной функцией* называется функция с компактным носителем, т. е. функция, равная нулю вне некоторого компакта. Пространство *основных* (*пробных*) функций D — это пространство $C_0^\infty(\mathbb{R})$ бесконечно дифференцируемых финитных функций. Последовательность $\{f_n\}$ функций из D *сходится в пространстве* D к функции $f \in D$ тогда и только тогда, когда функции f_n и f имеют общий компактный носитель, на котором f_n сходятся к f равномерно вместе со всеми своими производными. *Сверткой* функций $f, g \in D$ называется функция $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$.

Функция называется *плоской* в нуле, если она обращается в ноль в нуле вместе со всеми своими производными. Функция называется *k-плоской* в нуле, если она обращается в ноль в нуле вместе со всеми производными до порядка k включительно.

Задача 8.1. Докажите, что произведение основной и бесконечно гладкой функции — снова основная функция.

Задача 8.2. Докажите, что:
а) свертка основной и непрерывной функции — бесконечно гладкая функция,
б) свертка основной и финитной непрерывной функции — основная функция.

Задача 8.3. Докажите, что пространство основных функций плотно в пространстве всех финитных непрерывных функций в метрике C (равномерной метрике).

Задача 8.4. Постройте основную функцию, тождественно равную 1 в окрестности нуля.
Указание: используйте функцию $f(x) = \chi_{[0,+\infty)}e^{-\frac{1}{x^2}}$.

Задача 8.5. Докажите, что для любой плоской в нуле основной функции существует сходящаяся к ней в D последовательность основных функций, носитель которых не содержит нуля.

Задача 8.6*. Докажите, что сходимость в D не задается метрикой.

Дельта-функция

Дельта-функцией называется линейный функционал δ на D, действующий по правилу $(\delta, \varphi) = \varphi(0)$. Последовательность линейных функционалов f_n *слабо сходится* к функционалу f в D', если $(f_n, \varphi) \to (f, \varphi)$ для любой основной функции φ. *Функцией Хевисайда* называется функция $\theta(t) = \chi_{[0,+\infty)}(t)$.

Задача 8.7. Докажите, что любая дельта-образная последовательность сходится к дельта-функции в D'.

Задача 8.8. Постройте дельта-образную последовательность, состоящую из основных функций.

Задача 8.9. Докажите, что последовательность ядер Дирихле сходится к дельта-функции в D'.

Задача 8.10. Постройте последовательность кусочно-постоянных функций, которая сходится в D':
а) к δ', б) к δ''.

Задача 8.11. Пусть g — гладкое взаимно-однозначное отображение прямой на себя, $h = g^{-1}$. Выразить через δ и её производные функцию $\delta'(g(x))$.

Задача 8.12. Пусть обобщенная функция обращается в 0 на всех функциях, которые равны нулю в нуле. Докажите, что она пропорциональна дельта-функции.

Задача 8.13. Пусть обобщенная функция обращается в 0 на всех функциях, k-плоских в нуле. Докажите, что она равна линейной комбинации дельта-функции и ее производных до порядка k включительно.

Задача 8.14*. Докажите, что обобщенная функция с носителем в одной точке 0 равна (конечной) линейной комбинации дельта-функции и ее производных.

Свойства обобщенных функций

Задача 8.15. Докажите, что если $f_n \to f$ в $L_1(\mathbb{R})$, то $f_n \to f$ в D'.

Задача 8.16. Пусть $f' = 0$ в смысле D'. Докажите, что тогда $f = c$, т.е. $(f, \varphi) = (c, \varphi)$.

Задача 8.17. Пусть $f \in D', g \in C^\infty$. Докажите формулу Лейбница: $(fg)' = fg' + f'g$.

Задача 8.18. Решите уравнение $f' = f$ в D'.

Фундаментальные решения

Фундаментальным решением $E(t, \xi)$ для линейного дифференциального оператора L (по переменной t) называется обобщенная функция E, удовлетворяющая соотношению $LE = \delta(t - \xi)$.

Задача 8.19. Докажите, что функции $\theta(t-\xi)e^{-a(t-\xi)}$, $\frac{1}{2}\theta(t-\xi)\frac{\sin a(t-\xi)}{a}$ являются фундаментальными решениями операторов $\frac{d}{dt} + a$, $\frac{d^2}{dt^2} + a^2$.

Задача 8.20. Докажите, что фундаментальное решение для оператора с постоянными коэффициентами

$$L = \frac{d^n}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}\frac{d}{dt} + a_n$$

имеет вид

$$\theta(t-\xi)Z(t-\xi),$$

где Z удовлетворяет однородному уравнению $LZ = 0$ и начальным условиям $Z(0) = Z'(0) = \ldots = Z^{(n-2)}(0) = 0, Z^{(n-1)}(0) = 1$.

Задача 8.21. Докажите, что фундаментальное решение для оператора $Ly = y' - 2xy$ имеет вид $e^{x^2-\xi^2}\theta(x-\xi)$.

Задача 8.22. Докажите, что фундаментальное решение для оператора с переменными коэффициентами

$$L = \frac{d^n}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}\frac{d}{dt} + a_n$$

имеет вид

$$\theta(t-\xi)Z(t,\xi),$$

где Z удовлетворяет однородному уравнению $LZ = 0$ и начальным условиям $Z(\xi,\xi) = Z'(\xi,\xi) = \ldots = Z^{(n-2)}(\xi,\xi) = 0, Z^{(n-1)}(\xi,\xi) = 1$.

Много переменных

Задача 8.23. Обобщите определения основных понятий с пространств $D(\mathbb{R}), D'(\mathbb{R})$ на пространства $D(\mathbb{R}^m), D'(\mathbb{R}^m)$.

Задача 8.24. Сформулируйте и докажите формулу Лейбница в $D'(\mathbb{R}^m)$.

Задача 8.25. Как действует оператор Лапласа на сферические функции? Решите задачу, пользуясь двумя определениями оператора: через сумму частных производных и как div grad.

Задача 8.26. Найдите $\lim_{n\to\infty} n^k \chi_{\{r \le \frac{1}{n}\}}$ в $D'(\mathbb{R}^m)$ (исследуйте ответ по k).

Задача 8.27. Найдите последовательность сферически симметричных кусочно постоянных функций, сходящихся к δ в $D'(\mathbb{R}^m)$.

Задача 8.28. Найдите последовательность сферически симметричных кусочно постоянных функций, сходящихся к $\Delta\delta$ в $D'(\mathbb{R}^m)$.

Задача 8.29* Докажите, что функция

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

является фундаментальным решением оператора теплопроводности $\frac{d}{dt} - \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}$.

Задача 8.30. Определите действие дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами в $D'(\mathbb{R}^m)$.

Преобразование Фурье обобщенных функций

Задача 8.31* Вычислите преобразование Фурье следующих обобщенных функций:
а) дельта-функция, б) постоянная функция, в) $\chi_{[0,+\infty)}$,
г) $(x+i0)^{-1}$, где $(x+i0)^{-1}(f) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x+i\varepsilon} dx$,
д) $\chi_{[0,+\infty)} \sin x$, е) $F(x) = \begin{cases} -x, & x<0, \\ \sin x, & x>0, \end{cases}$
ж) конечная мера на прямой.