11. Пути в графах

▷ Приведённые задачи можно решать, используя следующие *не*формальные определения.
Граф можно представлять себе как набор точек (например, на плоскости), некоторые пары которых соединены ломаными Точки называются *вершинами* графа, а ломаные — *рёбрами*. При этом только концы каждой ломаной являются вершинами графа; ломаные могут пересекаться в неконцевых точках, но такие точки пересечения не считаются вершинами.
Будем считать, что каждое ребро соединяет разные вершины и каждая пара вершин не соединена более чем одним ребром. Общепринятое название таких графов — *графы без петель и кратных рёбер* или *простые графы*.
Распространённым примером графа является граф знакомств. Вершины этого графа соответствуют людям; две вершины соединены ребром, если соответствующие два человека знакомы между собой.
Количества вершин и рёбер рассматриваемого графа обозначаются V и E соответственно.
Степенью вершины графа называется число выходящих из неё рёбер.

Задача 11.1 (Степени вершин). а) В любом графе найдутся две вершины одинаковой степени.
б) Сумма степеней вершин в любом графе чётна и равна $2E$.

▷ *Путём* в графе называется последовательность вершин, в которой любые две соседние вершины соединены ребром. *Циклом* называется путь, в котором первая и последняя вершины совпадают. Путь (цикл) называется *несамопересекающимся* (или *простым*), если он проходит по каждой своей вершине только один раз и не проходит никакое ребро два раза подряд.
Граф называется *связным*, если любые две его вершины можно соединить путём.

Задача 11.2. Дан граф, степень любой вершины которого не меньше k, где $k \geq 2$. Докажите, что в этом графе найдётся простой цикл длины, не меньшей, чем $k+1$.

Задача 11.3. Дан двусвязный граф, т. е. связный граф, который при удалении любого своего ребра остаётся связным. Двое игроков по очереди ставят стрелки на рёбрах. Проигрывает игрок, после хода которого от какой-то вершины нельзя добраться до какой-нибудь другой, двигаясь только вдоль стрелок и по рёбрам без стрелок. Докажите, что при правильной игре обоих соперников партия закончится вничью.

Задача 11.4. а) В городе нет ни мостов, ни туннелей, ни тупиков. Все перекрёстки имеют крестообразную форму и образованы пересечением ровно двух улиц (улицы не обязательно прямые). Совершая инспекционную поездку по городу, губернатор на каждом перекрёстке поворачивал либо направо, либо налево. Через некоторое время шофёр губернатора заметил, что они едут по дороге, по которой уже проезжали. Докажите, что они едут в ту же сторону, что и в первый раз.
б) * Два альпиниста стоят на уровне моря на противоположных сторонах горного хребта (плоской ломаной с конечным числом звеньев), расположенного целиком над уровнем моря. Докажите, что они смогут встретиться, оставаясь в процессе движения всё время на одной высоте над уровнем моря.

▷ *Расстояние* между двумя вершинами связного графа — наименьшее число рёбер в соединяющем их пути (минимум берётся по всем соединяющим эти вершины путям). Расстояние в графе удовлетворяет неравенству треугольника. *Диаметр* связного графа — наибольшее из расстояний между его вершинами.

Задача 11.5.* Пусть в связном графе диаметра d минимальная длина цикла равна $2d+1$. Докажите, что степени всех вершин равны.