

### Дополнительные главы алгебры. Задачи к семинару 13.

**Задача 1.** Пусть  $V = \mathbb{C}^{n-1}$  – представление группы  $S_n$  симметриями тетраэдра.

(а) Докажите, что все представления вида  $\Lambda^k V$  неприводимы.

(б) Каким диаграммам Юнга они соответствуют?

**Задача 2.** Пусть  $S_{n-1} \subset S_n$  – стандартное вложение в качестве стабилизатора элемента  $n \in \{1, \dots, n\}$ .

(а) Выпишите какой-нибудь базис в централизаторе  $S_{n-1}$  в групповой алгебре  $\mathbb{C}S_n$  (т.е. в подалгебре инвариантов  $Z = (\mathbb{C}S_n)^{S_{n-1}}$  относительно действия сопряжениями).

(б) Докажите, что все элементы подалгебры  $Z$  инвариантны относительно антиавтоморфизма  $\mathbb{C}S_n \rightarrow \mathbb{C}S_n$ , переводящего любой групповой элемент  $g \in S_n$  в  $g^{-1}$ .

(в) Докажите, что алгебра  $Z$  коммутативна.

(г) Докажите, что ограничение любого неприводимого представления группы  $S_n$  а подгруппу  $S_{n-1}$  раскладывается в прямую сумму неприводимых без кратностей.

(д) Пусть  $V_\lambda$  – неприводимое представление  $S_n$ , соответствующее диаграмме Юнга  $\lambda$ . Какие диаграммы Юнга встречаются в разложении ограничения  $\text{Res}_{S_{n-1}}^{S_n} V_\lambda$ ?

(е) Докажите, что размерность  $V_\lambda$  равна количеству стандартных таблиц Юнга формы  $\lambda$ .

**Задача 3.** (а) Те же вопросы, что и в предыдущей задаче, для стандартного вложения  $S_{n-2} \times S_2 \subset S_n$ .

(б) Опишите (задайте образующими и соотношениями) централизаторную подалгебру  $(\mathbb{C}S_n)^{S_{n-2}}$ .

**Задача 4.** Пусть  $V = \mathbb{C}^n$  – представление группы  $S_n$  перестановками базисных элементов.

(а) Покажите, что для любого представления  $W$  группы  $S_n$  выполнено  $\text{Ind}_{S_{n-1}}^{S_n} \text{Res}_{S_{n-1}}^{S_n} W \simeq W \otimes V$ .

(б) Покажите, что  $\text{Res}_{S_n}^{S_{n+1}} \text{Res}_{S_n}^{S_{n+1}} W \simeq \text{Ind}_{S_{n-1}}^{S_n} \text{Res}_{S_{n-1}}^{S_n} W \oplus W$ .