Дополнительные главы алгебры. **Программа экзамена**

Экзамен для студентов 4 курса и магистрантов 2 года будет в пятницу 31 мая в 15:30. Для остальных – в сессионную неделю в июне. Надо будет ответить на один теоретический вопрос из билета и на один дополнительный вопрос (или задачу) по программе. Последний теоретический вопрос в экзаменационные билеты 31 мая включен не будет.

Теоретические вопросы

(1) Дайте определение модуля над коммутативным кольцом. Дайте определение свободного модуля. Докажите, что ранг свободного модуля над целостным кольцом определен корректно. Докажите, что подмодуль свободного модуля ранга n над кольцом главных идеалов – тоже свободен и имеет ранг $m < n$.
[2] гл.9 §2, §3; [3] §10.1;

(2) Сформулируйте и докажите теорему Жордана-Гельдера. [7] §2.7. [5] гл.4 §4;

(3) Сформулируйте и докажите теорему Крулля-Шмидта. [7] §2.8.

(4) Сформулируйте и докажите теорему о классификации конечнопорожденных модулей над кольцами главных идеалов. [5] гл. 15 §2.

(5) Дайте определение факториального кольца. Сформулируйте и докажите лемму Гаусса. Докажите, что кольцо многочленов над факториальным кольцом факториально.
[2] гл.9 §7; [3] §5.6-5.7

(6) Дайте определение поля частных целостного кольца. Сформулируйте и докажите лемму Гаусса. Докажите, что многочлен над факториальным кольцом неразложим тогда и только тогда, когда неразложим над его полем частных. Сформулируйте и докажите признак Эйзенштейна.
[2] гл.9 §7; [3] §5.4-5.6

(7) Дайте определение результанта пары многочленов через корни и через определитель матрицы Сильвестра. Докажите эквивалентность этих определений. Дайте определение дискриминанта многочлена через корни и через результант с производной.
[6] Лекция 5. [1] гл.6 §2 [4] гл. III §8.3

(8) Сформулируйте и докажите теорему Безу о кривых на плоскости.
[6] Лекция 5.

(9) Дайте определения целого расширения колец и докажите их эквивалентность. Докажите, что факториальное кольцо целозамкнуто.
[5] гл.9 §1;

(10) Дайте определение кольца целых числового поля. Докажите, что целые в числовом поле образуют решетку полного ранга. Докажите, что группа Галуа нормального расширения $\mathbb{Q}$ транзитивно действует на множестве максимальных идеалов над любым простым $p \in \mathbb{Z}$.
[5] гл.9 §2; [6] Лекция 6.

(11) Сформулируйте и докажите редукционный признак неприводимости многочлена с целыми коэффициентами. Докажите, что стабилизатор максимального идеала кольца целых в группе Галуа нормального расширения $\mathbb{Q}$ сюръективно отображается на группу Галуа фактора по этому идеалу.
[5] гл. 5 §7 и гл.9 §2;

(12) Дайте определение нетерова кольца. Докажите, что факторкольцо нетерова кольца нетерово. Сформулируйте и докажите теорему Гильберта о базисе. Докажите, что всякое конечнопорожденное кольцо над нетеровым кольцом нетерово.
[2] гл.9 §4; [3] §5.4-5.6

(13) Сформулируйте и докажите теорему Гильберта об инвариантах (для конечной группы).
Лекции, [4] гл. III §8.1

(14) Сформулируйте и докажите теорему Гильберта о нулях (над $\mathbb{C}$).
[5] гл. 10 §2 [2] гл.9

(15) Дайте определение полупростого модуля над кольцом. Сформулируйте и докажите теорему плотности. Выведите из теоремы плотности теорему Бернсайда о сюръективности неприводимого представления.
[5] гл. 17 §§1-3; [7] §§2.1-2.2

(16) Дайте определение полупростого кольца. Приведите примеры. Докажите, что всякое полупростое артиново кольцо есть прямая сумма матричных алгебр над телами.
[5] гл. 17 §§4-5

(17) Сформулируйте и докажите соотношения ортогональности характеров неприводимых комплексных представлений конечной группы. Докажите, что сумма квадратов размерностей неприводимых представлений равна порядку группы.
[5] гл. 18 §§1-5; [7] §§3.1-3.2,3.5

(18) Докажите, что размерность неприводимого комплексного представления конечной группы делит порядок этой группы. [7] §4.4

(19) Дайте определение индуцированного представления. Приведите примеры. Сформулируйте и докажите теорему двойственности Фробениуса.
[5] гл. 17 §§6-7; [7] §§4.8-4.10

(20) Опишите все неприводимые комплексные представления симметрической группы S_n. [7] §§4.12-4.13

(21) Сформулируйте и докажите теорему двойственности Шура-Вейля. Выведите из нее основную теорему теории инвариантов. [7] §§4.18-4.19

Список литературы

[1] А. И. Кострикин, *Введение в алгебру. Основы алгебры.*

[2] Э. Б. Винберг, *Курс алгебры. Издание 3-е, дополненное*

[3] А. Л. Городенцев, *Алгебра. Учебник для студентов-математиков. Часть 1.*

[4] А. Г. Кузнецов, *Курс алгебры.* http://www.mi.ras.ru /ãkuznet/kuznetsov_-_algebra.pdf

[5] С. Ленг, *Алгебра*

[6] М. Финкельберг, *Записки лекций в НМУ, алгебра 1 курс 1997 год. https://mccme.ru/ium/f97/algebra1.html*

[7] *Introduction to representation theory* by Pavel Etingof, Oleg Golberg, Sebastian Hensel, Tiankai Liu, Alex Schwendner, Dmitry Vaintrob, and Elena Yudovina http://math.mit.edu/ẽtingof/replect.pdf