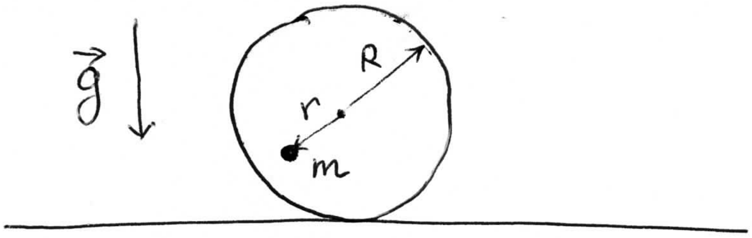
Механика

Домашнее задание №2 **срок сдачи 04.06.2019, в 12.00 перед лекцией**

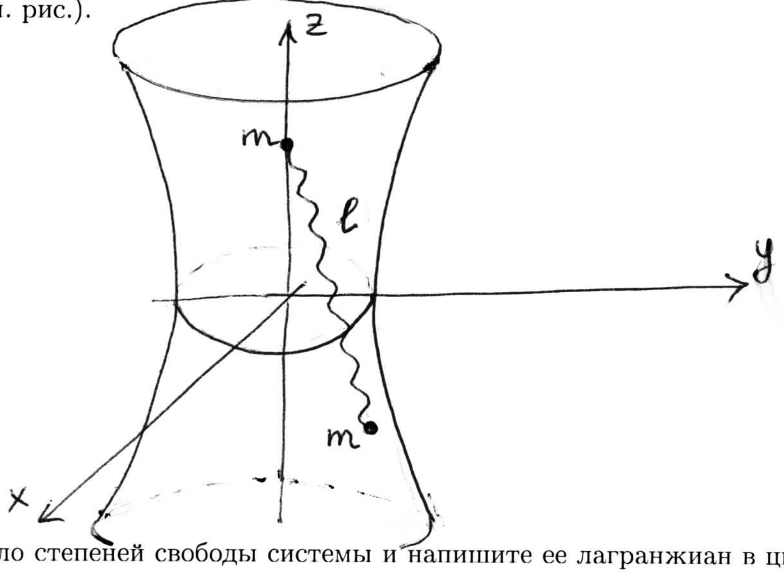
1. Невесомый жесткий диск радиуса R катится без проскальзывания по горизонтали; на диске на расстоянии $r < R$ от центра закреплен точечный груз массы m; в системе действует однородная сила тяжести (см. рис.).



а) Составьте лагранжиан системы.

б) Выпишите интеграл(ы) движения и нарисуйте фазовый портрет.

2. Частица массы m скользит по поверхности однополостного гиперболоида $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$. Вторая частица m движется вдоль оси $O\vec{z}$ и связана с частицей на гиперболоиде пружиной, потенциальная энергия деформации которой задается формулой $U(l) = \frac{kl^2}{2}$, где l — расстояние между частицами (см. рис.).



а) Определите число степеней свободы системы и напишите ее лагранжиан в цилиндрических координатах.

б) Приведите выражения для имеющихся интегралов движения .

3. Функционал $S[y(x)]$ определен на множестве $\mathbb{R}^\infty[0,1]$ гладких (бесконечно дифференцируемых) на отрезке $[0,1]$ функций $y(x)$ формулой:

$$S[y(x)] = \int_0^1 (y^2 + 2(y')^2 + (y'')^2)dx.$$

Найдите фунцию, на которой функционал S принимает экстремальное значение, если $y(x)$ принадлежат следующим подмножествам $\mathbb{R}^{\infty}[0,1]$:

а) Функции с фиксированными граничными значениями вида:

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y'(1) = -\mathrm{sh}(1).$$

б) Функции с фиксированными граничными значениями вида:

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 1,$$

но без ограничений на производные $y'(0)$ и $y'(1)$.

4. (Разновидность задачи о брахистохроне). Какой должны быть форма горки, чтобы санки, соскальзывая (без трения) с нее с нулевой начальной скоростью, могли за кратчайшее время удалиться от вершины горы на расстояние X по горизонтали?

5. Свободная точечная частица массы m движется по поверхности сферы.

а) Напишите лагранжиан этой динамической системы.

б) Выпишите выражения для сохраняющихся величин (интегралов движения)

в) Пользуясь интегралами движения, составьте дифференциальное уравнение геодезических на сфере и решите его, выбрав подходящую систему сферических координат.

6. Движение массивного точечного заряда e в поле электрического диполя в пространстве $\mathbb{R}^3$ определяется следующим лагранжианом:

$$L = \frac{m}{2}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 - \frac{e(\vec{d}\cdot\vec{r})}{r^3},$$

где $\vec{r}(t)$ — радиус-вектор заряда, а $\vec{d}$ — фиксированный вектор в $\mathbb{R}^3$ (дипольный момент).

а) Данная система обладает симметрией вращения вокруг оси, задаваемой вектором $\vec{d}$. Найдите соответствующий нетеровский интеграл движения.

б) Докажите, что однопараметрическое семейство преобразований с вещественным параметром α

$$\vec{r} \mapsto \alpha\vec{r}, \quad t \mapsto \alpha^2 t$$

является симметрией рассматриваемой системы, и найдите соответствующий нетеровский интеграл движения.

в) Какие еще интегралы движения существуют у этой системы?

7. Материальная точка массы m движется по прямой $O\vec{x}$ в однородном силовом поле:

$$L(x,\dot{x}) = \frac{m\dot{x}^2}{2} + gx.$$

С помощью теоремы Нетер определите закон сохранения, отвечающий преобразованию симметрии $t \mapsto t$, $x \mapsto x + \epsilon$.