Квантование функций на матричной алгебре $Mat_n(\mathbb{C})$. (II)

Итак, мы рассматриваем квантовую (некоммутативную) алгебру функций $\mathcal{F}_n(R)$ на $Mat_n(\mathbb{C})$, порождённую n^2 генераторами t^i_j, которые удобно считать матричными элементами матрицы

$$T = \| t^i_j \| .$$

$\boxed{\text{Зам.}}$ Матрица T – объект тензорного произведения $\mathcal{F}_n(R) \otimes Mat_n(\mathbb{C})$:

$$T = \sum_{i,j=1}^{n} t^i_j \otimes E^i_j$$

Перестановочные соотношения между t^i_j задаются в виде матричного равенства:

$$R_{12} T_1 T_2 = T_1 T_2 R_{12} \qquad (\star)$$

В явном виде:

$$\sum_{\alpha_1, \alpha_2 = 1}^{n} R^{i_1 i_2}_{\alpha_1 \alpha_2} t^{\alpha_1}_{j_1} t^{\alpha_2}_{j_2} = \sum_{\alpha_1 \alpha_2 = 1}^{n} t^{i_1}_{\alpha_1} t^{i_2}_{\alpha_2} R^{\alpha_1 \alpha_2}_{j_1 j_2}.$$

На прошлой лекции мы выбрали в качестве R – матрицу Дринфельда–Джимбо.

Это не случайный выбор.

Соотношение кос

$$R_{12} R_{23} R_{12} = R_{23} R_{12} R_{23}$$

гарантирует отсутствие условий на генераторы t^i_j (помимо квадратичных соотношений (A)) в старших однородных компонентах алгебры $\mathcal{F}_n(R)$.

Поясним на примере кубических мономов по t^i_j.

Пользуясь (A) мы можем перевести моном $t^{i_1}_{j_1} t^{i_2}_{j_2} t^{i_3}_{j_3}$ в $t^{i_3}_{j_3} t^{i_2}_{j_2} t^{i_1}_{j_1} + \ldots$

и сделать это можно 2 путями.

Будем пользоваться матричными обозначениями: $t^{i_1}_{j_1} t^{i_2}_{j_2} t^{i_3}_{j_3} = T_1 T_2 T_3$.

Введем матрицу $R_{12} = P_{12} R_{12}$, где P – матрица перестановки.

Из соотношение кос легко следует, что матрица R удовлетворяет уравнению Янга-Бакстера:

$$R_{12} R_{13} R_{23} = R_{23} R_{13} R_{12}.$$

Перестановочные соотношения =3= (A) принимают вид:

$$R_{12} T_1 T_2 = T_2 T_1 R_{12}$$

(для этого достаточно умножить (A) слева на P_{12} и воспользоваться свойством $P_{12} T_1 T_2 R_{12} = T_2 T_1 P_{12} R_{12} = T_2 T_1 R_{12}$)

Поскольку R обратима, то

$$T_1 T_2 = R_{12}^{-1} T_2 T_1 R_{12}.$$

Обратимся теперь к нашей задаче переупорядочения $T_1 T_2 T_3 \to T_3 T_2 T_1$.

<u>1й способ.</u> Начинаем с перестановки T_1 и T_2; затем T_1 и T_3, и, наконец, T_2 и T_3:

$$\underline{T_1 T_2} T_3 = R_{12}^{-1} T_2 \underline{T_1 T_3} R_{12} = R_{12}^{-1} R_{13}^{-1} T_2 \underline{T_3 T_1} R_{13} R_{12} =$$

$$= R_{12}^{-1} R_{13}^{-1} R_{23}^{-1} T_3 T_2 T_1 R_{23} R_{13} R_{12}$$

<u>2й способ.</u>

Начинаем с перестановки T_2 и T_3, затем T_1 и T_3 и, наконец T_1 и T_2.

Это даёт равенство вида:

$$T_1 T_2 T_3 = R_{23}^{-1} R_{13}^{-1} R_{12}^{-1} T_3 T_2 T_1 R_{12} R_{13} R_{23} = 4 =$$

Левые части в 1м и 2м способе одинаковы. Если правые части <u>не</u> равны друг другу тождественно, то это означает, что есть нетривиальные <u>кубические</u> соотношения в алгебре $\mathcal{F}_n(R)$. Это же верно и для всех старших мономов по генераторам. Соотношения Янга-Бакстера на R гарантирует равенство правых частей в преобразованиях по 1му и 2му способам и препятствует возникновению старших по степени перестановочных соотношений.

Убедимся, что количество <u>независимых</u> соотношений в матричном равенстве

$$R_{12} T_1 T_2 = T_1 T_2 R_{12}$$

такое же, как и в исходной коммутативной алгебре функций на $Mat_n(\mathbb{C})$: $t^{i_1}_{j_1} t^{i_2}_{j_2} = t^{i_2}_{j_2} t^{i_1}_{j_1}$, генераторов t^i_j n^2 <u>штук</u> $\Rightarrow$ этот дает

$\frac{(n^2-1)n^2}{2}$ соотношений.

$\boxed{V}$ Матричное равенство

$$R_{12} T_1 T_2 = T_1 T_2 R_{12}$$

эквивалентно двум матричным равенствам

$$\begin{cases} A^{(2)}(R)\, T_1 T_2\, S^{(2)}(R) = 0 \\ S^{(2)}(R)\, T_1 T_2\, A^{(2)}(R) = 0 \end{cases}$$

где $A^{(2)}_{12}(R) = \frac{(q\mathbb{1} - R_{12})}{2q}$

$S^{(2)}_{12}(R) = \frac{(\frac{1}{q}\mathbb{1} + R_{12})}{2q}$

Доказательство:

$A^{(2)}$ и $S^{(2)}$ — ортогональные проекторы:

$$A^{(2)} \cdot A^{(2)} = A^{(2)}$$
$$S^{(2)} \cdot S^{(2)} = S^{(2)}$$
$$A^{(2)} \cdot S^{(2)} = 0 = S^{(2)} \cdot A^{(2)}$$
$$A^{(2)} + S^{(2)} = \mathbb{1}$$

Поэтому, если есть RTT соотношения, то $ATTS = 0 = STTA$ в силу ортогональности A и S и в силу того, что A и S проносятся через T_1 и T_2:

$$A^{(2)} T_1 T_2 = T_1 T_2 A^{(2)}$$
$$S^{(2)} T_1 T_2 = T_1 T_2 S^{(2)}.$$

Обратно, пусть $\begin{cases} A^{(2)} T_1 T_2 S^{(2)} = 0 \\ S^{(2)} T_1 T_2 A^{(2)} = 0. \end{cases}$

Раскрывая определение $A^{(2)}$ и $S^{(2)}$ через R, получим 2 матричных равенства:

$$0 = A^{(2)} T_1 T_2 S^{(2)} \to 0 = T_1 T_2 - \frac{1}{q} R_{12} T_1 T_2 + q\, T_1 T_2 R_{12} - R_{12} T_1 T_2 R_{12} = 0$$

$$0 = S^{(2)} T_1 T_2 A^{(2)} \to 0 = T_1 T_2 - \frac{1}{q} T_1 T_2 R_{12} + q\, R_{12} T_1 T_2 - R_{12} T_1 T_2 R_{12}$$

Беря разность этих выражений, получаем

$$2_q \left(T_1 T_2 R_{12} - R_{12} T_1 T_2 \right) = 0.$$

Пользуясь этим утверждением, мы сводим вопрос о количестве независимых соотношений в $RTT = TTR$ к вопросу о независимых соотношениях в паре $ATTS = 0 = STTA$.

Множества $ATTS$ и $STTA$ можно трактовать как образ действия проекционных операторов $P_{AS} = A \triangleright (\ldots) \triangleleft S$ и $P_{SA} = S \triangleright (\ldots) \triangleleft A$ в n^4-мерном пространстве $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(t_i^j \otimes t_s^k)$

Поскольку $P_{SA} \cdot P_{AS} \triangleq T \otimes T = S(A(TT)S)A \equiv 0$, то

их образы пересекаются только по нулевому вектору и количество независимых элементов в $ATTS \cup STTA$ равно сумме независимых элементов в $ATTS$ и $STTA$ по отдельности.

Дальше пользуемся тем, что размерность образа проекционного оператора равна его рангу, а ранг проектора равен его следу (т.к. у проектора $P^2 = P \Rightarrow P(P-1) = 0 \Rightarrow$ собственные значения только 0 и 1).

Поэтому $\dim(\operatorname{Im} P_{SA}) = \operatorname{Tr} P_{SA} = (\operatorname{Tr}_{(12)} A^{(2)}_{12}) \cdot (\operatorname{Tr}_{(12)} S^{(2)}_{12}) = \dim(\operatorname{Im} P_{AS})$.

Для матрицы Дринфельда – Джимбо:

$$R = q\sum_{i=1}^{n} E^i_i \otimes E^i_i - \sum_{i \neq j} E^i_j \otimes E^j_i + \lambda \sum_{i<j} E^i_i \otimes E^j_j$$

$$A = \frac{1}{2q}(q\mathbb{1} - R) = \frac{1}{2q}\left(q\sum_{i\neq j}^{n} E^i_i \otimes E^j_j + \sum_{i\neq j} E^i_j \otimes E^j_i - \lambda \sum_{i<j} E^i_i \otimes E^j_j\right).$$

Поэтому $Tr_{(2)} A^{(2)}_{12} = \frac{1}{2_q}\Big(q(n-1)\sum_{i=1}^{n} E^i_i -$

$- \lambda \sum_{i=1}^{n} (n-i) E^i_i\Big)$

$$Tr_{(1)} Tr_{(2)} A^{(2)}_{12} = \frac{1}{2_q}\left(qn(n-1) - \lambda \frac{n(n-1)}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2_q} \frac{n(n-1)}{2}\big(\underbrace{2q-\lambda}_{= q+\frac{1}{q} = 2_q}\big) = \frac{n(n-1)}{2}$$

Аналогично $\quad Tr_{(12)} S^{(2)}_{12} = \frac{n(n+1)}{2}$

Поэтому
$$\left.\begin{aligned} Tr\, P_{AS} &= \frac{n^2(n^2-1)}{4} \\ Tr\, P_{SA} &= \frac{n^2(n^2-1)}{4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ всего пара равенств $\left\{\begin{aligned} A^{(2)}_{12} T_1 T_2 S^{(2)}_{12} &= 0 \\ S^{(2)}_{12} T_1 T_2 A^{(2)}_{12} &= 0 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow R_{12} T_1 T_2 = T_1 T_2 R_{12}$

задаёт $\frac{n^2(n^2-1)}{2}$ соотношений – как и в исходной коммутативной алгебре.

— и —

Квантовый детерминант.

Как мы уже выяснили, алгебра функций на $Mat_n(\mathbb{C})$ обладает структурой биалгебры с коумножением $\Delta(t^i_j) = t^i_k \otimes t^k_j$ и коединицей $\varepsilon(t^i_j) = \delta^i_j$.

$\boxed{\text{У}}$ Алгебра квантованных функций на $Mat_n(\mathbb{C})$ обладает структурой биалгебры с теми же отображениями Δ и ε.

Доказательство:

Достаточно проверить, что определённые выше отображения переводят в 0 элементы $R_{12}T_1T_2 - T_1T_2R_{12}$ (равные нулю в алгебре $\mathcal{F}_n(R)$). Это проверяется несложно, т.к. $\Delta(T_1) = T_1 \otimes T_1$, $\Delta(T_2) = T_2 \otimes T_2$, то

$$\Delta(R_{12}T_1T_2) = R_{12}T_1T_2 \otimes T_1T_2 = T_1T_2R_{12} \otimes T_1T_2 =$$
$$= T_1T_2 \otimes R_{12}T_1T_2 = T_1T_2 \otimes T_1T_2R_{12} =$$
$$= \Delta(T_1T_2R_{12})$$

$\varepsilon(T) = \mathbb{1} \Rightarrow \varepsilon(R_{12}T_1T_2 - T_1T_2R_{12}) =$

$= R_{12}\, \mathcal{E}(T_1)\mathcal{E}(T_2) - \mathcal{E}(T_1)\mathcal{E}(T_2) R_{12} =$

$= R_{12} 1_1 1_2 - 1_1 1_2 R_{12} = 0.$

Рассмотрим в алгебре $Mat_n(\mathbb{C})$ подмножество невырожденных матриц. Это подмножество образует матричную группу $GL(n)$.

Согласно определению детерминанта:

$$\det M = \sum_{\{i\},\{j\}} \frac{1}{n!} \varepsilon_{i_1 \dots i_n} M^{i_1}{}_{j_1} \dots M^{i_n}{}_{j_n} \varepsilon^{j_1 \dots j_n},$$

где $\varepsilon_{i_1 \dots i_n}$ — полностью антисимметрический тензор n-го ранга с условием

$$\varepsilon_{12 \dots n} = 1.$$

Вводя антисимметризатор $A^{(n)}(P)$ в тензорной степени $V^{\otimes n}$ $(\dim V = n)$, определение $\det M$ можно записать так:

$$\det M = Tr_{(12\dots n)} A^{(n)}_{1\dots n} M_1 M_2 \dots M_n,$$

поскольку $A^{(n)}{}^{i_1 \dots i_n}_{j_1 \dots j_n} = \frac{1}{n!} \varepsilon^{i_1 \dots i_n} \varepsilon_{j_1 \dots j_n}$

Отметим, что старший антисимметризатор $A^{(n)}$ — это проектор ранга 1.

Для функций на матричной группе $GL(n)$ следующий элемент

$$\det T = Tr_{(1\dots n)} A^{(n)}(P) T_1 \dots T_n$$

отличен от нуля: $\forall M \in GL(n)$

$$\det T(M) = \det M \neq 0.$$

Поэтому расширим алгебру $Fun(GL(n))$ введя обратный к $\det T$: $(\det T)^{-1} \det T = 1$. Как (бесконечномерное) векторное пространство алгебра функций на $GL(n)$ представляет собой полиномы от $(\det T)^{-1}$ с коэффициентами из $Fun(~~GL~~ Mat_n(\mathbb{C}))$.

В алгебре функций на $GL(n)$ можно определить антипод и превратить её из биалгебры в алгебру Хопфа.

$$S(t^i{}_j) = (T^{-1})^i{}_j = \frac{1}{\det T} a^i{}_j,$$

где $a^i{}_j$ - алгебраическое дополнение $t^i{}_j$ в матрице T.

Это действительно антигомоморфизм в силу свойств умножения обратных матриц и

$m \circ (id \otimes S)\Delta(t^i_j) = t^i_k (t^{-1})^k_j =$

$\uparrow$ умножение $= \delta^i_j = \varepsilon(t^i_j) =$

$= m \circ (S \otimes id)\Delta(t^i_j)$.

Чтобы построить квантование функций на матричной группе, надо найти в квантованной алгебре функций на $Mat_n(\mathbb{C})$ аналог детерминанта.

$\boxed{О}$ $\det_q T = Tr_{(1\ldots n)} A^{(n)}(R) T_1 \ldots T_n$

будем называть <u>квантовым</u> детерминантом в алгебре $\mathcal{T}_n(R)$.

Для R-матрицы Дринфельда–Джимбо $A^{(n)}(R)$ (<u>старший</u> q-антисимметризатор) – проектор <u>единичного</u> ранга.

Это значит, что $\exists$ тензоры $u^{i_1\ldots i_n}$ и $v_{j_1\ldots j_n}$ (аналоги полностью антисимметричного тензора $\varepsilon_{i_1\ldots i_n}$) такие, что $A^{(n)}{}^{i_1\ldots i_n}_{j_1\ldots j_n} = u^{i_1\ldots i_n} v_{j_1\ldots j_n}$

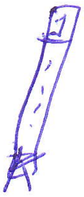
Удобно ввести такие обозначение: $A^{(n)} = |u\rangle\langle v|$

Тогда $\det_q T = Tr_{(1\dots n)} A^{(n)} T_1 \dots T_n =$

$= \langle v | T_1 \dots T_n | u \rangle$.

$\boxed{V}$ Для антисимметризатора $A^{(n)}(R)$ справедлива рекуррентная формула:

$$A^{(n)}_{1\dots n}(R) = \frac{1}{n_q} A^{(n-1)}_{1\dots n-1} \left(q^{n-1} - (n-1)_q R_{n-1}\right) A^{(n-1)}_{1\dots n-1}$$

Здесь $A^{(k)}_{1\dots k}$ — идемпотенты алгебры Гекке $H_k(q)$ в R-матричном представлении, которые отвечают диаграмме 

.

Последовательно применяя эту формулу для $A^{(n-1)}, \dots A^{(k)} \dots$ мы представим $A^{(n)}$ в виде произведения линейных скобок вида $(q^m - m_q R_m)$.

Учитывая RTT соотношение

$$R_m T_m T_{m+1} = T_m T_{m+1} R_m,$$

получим важное следствие:

$$A^{(n)}_{1\ldots n}(R)\,T_1\ldots T_n = T_1\ldots T_n\,A^{(n)}_{1\ldots n}(R)$$

Далее, $A^{(n)}$ — проекционный оператор, т.е. $A^{(n)}\cdot A^{(n)} = A^{(n)}$, поэтому имеем следующее свойство:

$$A^{(n)}T_1\ldots T_n = A^{(n)}A^{(n)}T_1\ldots T_n =$$

$$= A^{(n)}T_1\ldots T_n A^{(n)}$$

Выражение $A^{(n)}T_1\ldots T_n A^{(n)}$ имеет вид:

$$\underbrace{|u\rangle\langle v|}_{A^{(n)}}T_1\ldots T_n\underbrace{|u\rangle\langle v|}_{A^{n}} = A^{(n)}\det_q T.$$

Поэтому $\boxed{A^{(n)}T_1\ldots T_n = \det_q T\,A^{(n)}.}$

Пользуясь этим свойством, легко доказать:

$\boxed{\text{V}}$ $\det_q T$ является групповым элементом относительно коумножения

$$\Delta(\det_q T) = \det_q T \otimes \det_q T.$$

Если элемент $\det_q T$ — централен, то можно расширить алгебру $\mathcal{T}_r(R)$ введя его обратный:

$$(\det_q T)(\det_q T)^{-1} = (\det_q T)^{-1} \det_q T = 1$$

$$t^i_j (\det_q T)^{-1} = (\det_q T)^{-1} t^i_j$$

Тогда расширенная алгебра будет называться алгеброй квантованных функций на матричной группе $GL(n)$:

$$\mathrm{Fun}_q(GL(n)) \simeq \mathcal{T}_n(R) \otimes \mathbb{C}[(\det_q T)^{-1}]$$

(Элементы этой алгебры — всевозможные полиномы от центрального элемента $(\det_q T)^{-1}$ и коэффициентами из $\mathcal{T}_n(R)$).

Справедливо следующее утверждение.

[Y] (D.I. Gurevich, (1990) "Алгебраические аспекты уравнения Янга-Бакстера", Алгебра и Анализ, Том 2, Вып. 4, стр. 119-148).

$\det_q T$ централен в $\mathcal{T}_n(R)$ тогда и только тогда когда матрица

$$M = \| M^i_j \| \quad M^i_j = \sum_{\{a\}} u^{i a_2 \ldots a_n} v_{a_2 \ldots a_n j}$$

кратна единичной матрице.

Можно определить, также, матрицу $N = \|N^i{}_j\| = \sum_{\{a\}} u^{a_1 \ldots a_{n-1} i} v_{j a_1 \ldots a_{n-1}}$.

Матрицы M и N невырождены или вырождены одновременно, и если они не вырождены, то

$$M \circ N \sim \mathbb{1}.$$

$\boxed{\text{V}}$ В общем случае Гекковской R-матрицы

$$(N \cdot T)(\det_q T) = (\det_q T)(T \cdot N)$$

Если матрица N - скалярна (кратна 1), то $t^i{}_j$ коммутируют с $\det_q T$.

$\boxed{\text{V}}$ В случае центрального $\det_q T$ можно определить аналог T^{-1} в квантовой алгебре $Fun_q(GL(n))$ и отображение $S(t^i{}_j) = (T^{-1})^i{}_j$ будет отображением антипода.

В заключение разберем пример $n=2$ и Дринфельд-Джимбовскую R-матрицу.

$$R = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2q}(q - R) = \frac{1}{2q}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{q} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A^{i_1 i_2}_{j_1 j_2} = u^{i_1 i_2} v_{j_1 j_2} \Rightarrow$ можно взять

$$\|u^{i_1 i_2}\| = \frac{1}{2q}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -q \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \|v_{j_1 j_2}\| = \left(0, \frac{1}{q}, -1, 0\right)$$

$\boxed{\text{Зам}}$ u и v определены с точностью до нормировки: $u \to \alpha u$, $v \to \frac{1}{\alpha} v$, $\alpha \neq 0$.

$$\det{}_q T = \langle v | T_1 T_2 | u \rangle =$$

$$= \frac{1}{2q}\left(0, \frac{1}{q}, -1, 0\right)\begin{pmatrix} a^2 & ab & ba & b^2 \\ ac & ad & bc & bd \\ ca & cb & da & db \\ c^2 & cd & dc & d^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -q \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2q}\left(\frac{ad}{q} - cb - bc - q\,da\right)$$

Но $RT_1T_2 = T_1T_2R \Leftrightarrow$
$$\begin{aligned} ab &= q\,ba & bc &= cb \\ ac &= q\,ca & bd &= q\,db \\ ad - da &= \lambda bc & cd &= q\,dc \end{aligned}$$

Поэтому $\det_q T$ можно упростить до следующего вида:

$$\det_q T = ad - qbc = da - \frac{1}{q} bc.$$

Пользуясь явными перестановочными соотношениями на a, b, c и d можно убедиться, что $\det_q T$ – центральный элемент.

В данном случае легко найти, что $N = \| u^{ai} v_{ja} \| = \frac{(-1)}{2q} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – кратна единичной матрице.

$\boxed{V}$ Для матрицы Дринфельда – Джимбо M и N скалярные матрицы при $\forall n. \Rightarrow$ в RTT алгебре, связанной с ~~R~~-матрицей Дринфельда – Джимбо $\det_q T$ всегда централен.