Лекция 13-19. Обобщенные функции

1 Идея: рассматривать функции как функционалы: $(f,\varphi) = \int f\varphi,\ \varphi$ - пробная.

Задача 1 *Непрерывная функция однозначно восстанавливается по своим значениям на пробных $\varphi \in C^0$.*

Определение 1 *(Напоминание) Носитель функции - минимальное замкнутое множество, вне которого функция равна нулю. Функция с компактным носителем называется финитной.*

Все функции в этой лекции рассматриваются на вещественной прямой.

2 Пространство основных (пробных) функций.

Определение 2 *Пространство основных (пробных) функций D - это пространство C_0^∞ бесконечно дифференцируемых функций с комплексным носителем.*

Определение 3 *Сходимость на D:*

$$\varphi_n \to \varphi \text{ в } D \Leftrightarrow \varphi_n^{(k)} \rightrightarrows \varphi^{(k)}, \tag{1}$$

и существует K - компакт:

$$supp\ f_n \subset K. \tag{2}$$

Определение 4 *Пусть f непрерывна или $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Тогда*

$$(f,\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f\varphi dx. \tag{3}$$

Предложение 1 *Функционал (3) слабо непрерывен в следующем смысле: если $\varphi_n \to \varphi$ в D, то $(f,\varphi_n) \to (f,\varphi)$.*

Пример 1 *Если не требовать (2), то предложение неверно.*

В дальнейшем мы используем обозначение $\int f$, считая "интеграл" именем функционала $\int f = \int f(x)dx$.

3 Свойства пространства D.

Предложение 2 *Пространство D непусто и всюду плотно в C_0.*

Доказательство Положим:

$$\varphi_0(x) = \chi_{\mathbb{R}^+} e^{-\frac{1}{x}} \in C^\infty,$$

$$\psi(x) = \varphi_0(x)\varphi_0(1-x) \in D,$$

$$I = \int_{\mathbb{R}} \psi dx,$$

$$\psi_n = \frac{n\psi(nx)}{I}. \tag{4}$$

□

Предложение 3 *Для определенных выше функций ψ_n имеем: $\forall\ f \in C_0,\ f_n = \psi_n * f \in D$. На лекции 3 доказано, ято последовательность ψ_n дельта-образная, и $f_n \rightrightarrows f$ на $\mathbb{R}$. Свертка основной функции с непрерывной - бесконечно гладкая функция (докажите!).*

Отсюда следует Предложение 2.

4 Определение обобщенных функций.

Определение 5 *Обобщенная функция - это линейный слабо непрерывный функционал на пространстве основных функций.*

Пример 2 *Функцияf из L^1_{loc}; формула* (3)*задает* регулярную *обобщенную функцию.*

Пример 3 *δ-функция*

$$(f, \varphi) = \varphi(0).$$

Пример 4 *$(f, \varphi) = \tilde{\varphi}(i)$, где $\tilde{\varphi}$ -преобразование Фурье функции φ.*

Пространство всех обобщенных функций (с определенной ниже слабой сходимостью) обозначается D'.

5 Сходимость обобщенных функций: слабая на D.

Слабая сходимость функционалов - аналог поточечной сходимости функций.

Определение 6 *Последовательность $f_n \in$ (слабо) сходится к $f \in D'$ если и только если для каждой пробной функции $\varphi \in D$ имеет место сходимость $(f_n, \varphi) \to (f, \varphi)$.*

Задача 2 *Пусть ψ_n дельта-образная последовательность. Тогда $\psi_n \to \delta$ в D'.*

6 Дифференцирование обобщенных функций.

Все обобщенные функции бесконечно дифференцируемы (!).

Идея: Берем регулярную обобщенную функцию, дифференцируем и смотрим, что получится. Пусть $f \in C^1 : (f', \varphi) = \int f'\varphi = -\int f\varphi' = -(f, \varphi')$.

Определение 7 *Пусть $f \in D'$. Тогда*

$$f' : (f'\varphi) = -(f, \varphi').$$

Сходимость.

Предложение 4 *Обобщенные функции всегда сходятся со всеми производными.*

Доказательство Следует из определений. □

Задача 3 *$\delta = \chi'$, где χ' - функция Хэвисайда:*

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$$

Задача 4 *Пусть $f_n \to f$ в L^1_{loc}. Тогда $f_n \to f$ в D'.*

7 Связь обобщенных функций с регулярными.

Теорема 1 *Пусть* $f' = 0$ *в* D'. *Тогда* $f = c$, $(f, \varphi) = c \int \varphi$.

Доказательство Пусть $\varphi_0 \in D$ - функция с интегралом, равным 1. Тогда функция $\psi = \varphi - \varphi_0 \int \varphi$ имеет нулевой интеграл по $\mathbb{R}^1$ и, значит, является производной для некоторой функции $\Psi \in D : \psi = \Psi'$, $\Psi'(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(y)dy$. Тогда $\varphi = \varphi_0 \int \varphi + \psi'$, и

$$(f, \varphi) = (f, \varphi_0) \int \varphi + (f, \Psi') = \int (f, \varphi_0) \varphi.$$

Значит, $f = (f, \varphi_0)$ и действует на основных функциях как умножение на константу $c = (f, \varphi_0)$. $\square$

Следствие 1 *Пусть* $f \in D'$, $f' = g$ *в* D', *причем функция* g *непрерывна. Тогда* $f \in C^1$, *и* $f' = g$ *в* C.

Доказательство Пусть G - первообразная для g. Тогда $G \in C^1$, и $(f - G)' = 0$ в D'. Следовательно, $f - G = \mathrm{const}$, $f' = G' = g$ в C. $\square$