Лекция 14-19. Фундаментальные решения

1 Много переменных

Основные определения теории обобщенных функций для многих переменных давались в качестве задачи на занятиях. В частности, было объяснено равенство $(L_x u, \varphi) = (u, {}^tL_x\varphi)$.

2 Фундаментальное решение

Определение 1 *Если $LE = \delta$, E - фундаментальное решение оператра L.*

Положим: $E_\xi(x) = E(x - \xi)$. Тогда

$$LE_\xi(x) = \delta(x - \xi) := \delta_\xi.$$

3 Применение фундаментальных решений

Теорема 1 *Пусть функция f непрерывна, $E_\xi \in L^1_{loc}$, и $u(x) = \int E_\xi(x)f(\xi)d\xi$. Тогда*

$$Lu = f,$$

в смысле обобщенных функций.

Доказательство **Эвристика.**

$$L_x u = \int L_x E_\xi(x)f(\xi)d\xi = \int \delta(x - \xi)f(\xi)d\xi = f(x).$$

Строгость. Пусть $\varphi \in D$.

$$(L_x u, \varphi) = (u, {}^tL_x\varphi) = \int {}^tL_x\varphi(x)dx \int E_\xi(x)f(\xi)d\xi = \int \left(\int {}^tL(x)\varphi(x)E_\xi dx\right) f(\xi)d\xi =$$

$$\int f(\xi)(E_\xi, {}^tL_x\varphi)d\xi = \int f(\xi)(L_xE_\xi, \varphi)d\xi = \int f(\xi)(\delta(x-\xi), \varphi)d\xi = \int f(\xi)\varphi(\xi)d\xi = (f, \varphi).$$

Итак, $(L_x u, \varphi) = (f, \varphi)$ для любого $\varphi \in D$. $\square$

Замечание 1 *Если L - оператор с постоянными коэффициентами, то $E_\xi(x) = E(x-\xi)$. Можно брать и $E(\xi - x)$. Тогда*

$$u = E_\xi * f.$$

4 Фундаментальные решения линейных уравнений.

Пусть функции $a_k, k = 0, 1, ..., n-1$ непрерывны на всей прямой. Рассмотрим уравнение

$$L_x y = y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = \delta(x - \xi)$$

Решение этого уравнения назывется фундаментальной функцией или фундаментальным решением оператора L_x.

Теорема 2 *Пусть y_1, y_2 - два решения уравнения $L_x y = 0$, причем первое не зависит, а второе зависит от парметра ξ, такие что*

$$E_\xi(x) = \begin{cases} y_1(x), & x \leq \xi \\ y_2(x), & x \geq \xi \end{cases}$$

и удовлетворяет следующим условиям склейки в точке ξ: $E_\xi \in C^{n-2}$, производная $D^{n-1}E_\xi$ кусочно непрерывна и имеет скачок в точке ξ: $D^{n-1}(E_\xi(\xi + 0)) = D^{n-1}E_\xi(\xi - 0) + 1$. Тогда

$$L_x E_\xi = \delta(x - \xi).$$

Доказательство Проведем доказательство для постоянных коэффициентов и $\xi = 0$. Доказательство для переменных коэффициентов и произвольного ξ проводится с помощью незначительных модификаций, которые предлагаются в качестве задачи.

Нам нужно доказать, что

$$LE_0 = \delta. \tag{1}$$

Следующие утверждения предлагаются в качестве задач.

Задача 1 *Пусть $g \in C^\infty, g(0) = 0$. Тогда $g\delta = 0$ в D'.*

Задача 2 *Пусть $g \in C^\infty, g(0) = g'(0) = ... = g^{(k)}(0) = 0$. Тогда $g\delta^{(k)} = 0$ в D'.*

Задача 3 *Докажите формулу Лейбница для производной произведения обобщенной функции на бесконечно гладкую.*

Рассмотрим разность $y = y_2 - y_1$. Это снова решение уравнения $Ly = 0$ с начальными условиями $y(0) = ... = y^{(n-2)}(0) = 0, \; y^{(n-1)} = 1$. Пусть θ - функция Хевисайда, $\theta = \chi_{\mathbb{R}^+}$. Докажем, что

$$LE := L(\theta y) = \delta. \tag{2}$$

По формуле Лейбница, $E' = \theta y' + \delta y$. Но $y(0) = 0$. Следовательно, $\delta y = 0$ в D'. Индукцией по k доказывется, что $E^{(k)} = \theta y^{(k)}$ при $k \leq n - 1$. Снова по формуле Лейбница, $E^{(n)} = \theta y^{(n)} + \delta y^{(n-1)} = \theta y^{(n)} + \delta$. Отсюда

$$LE = \theta Ly + \delta = \delta.$$

$\square$

5 Сходимость к фундаментальному решению

Предложение 1 *Пусть* f_n *-* δ*-образная последовательность,* $L = p(D)$*, и* $Lu_n = f_n$*,* $u_n \in L^1_{loc}$*,* $u_n \to u$ *в* L_1*. Тогда* u *- фундаментальное решение оператора* L*.*

Доказательство Обобщенные функции сходятся вместе с производными. Если

$$u_n \to u \text{ в } L^1,$$

то

$$u_n \to u \text{ в } D'.$$

Значит,

$$Lu_n \to Lu \text{ в } D'.$$

Но

$$Lu_n = f_n \to \delta \text{ в } D'.$$

Следовательно,

$$Lu = \delta.$$

□

6 Фундаментальное решение уравнения Лапласа.

Теорема 3 *Фундаментальное решение уравнения Лапласа в* $\mathbb{R}^n$ *пропорционально гармонической в* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *функции, зависящей только от радиуса.*

Доказательство

Задача 4 *Докажите, что гармонические функции в* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$*, зависящие только от радиуса, имеют вид:* $c_1 + c_2 r^{2-n}$ *при* $n > 2$ *и* $c_1 + c_2 \ln r$ *при* $n = 2$*.*

Доказательство будет дано для $n > 2$. Рассмотрим функцию

$$u_1(r) = \begin{cases} -r^{2-n}, \ r \geq 1 \\ c_1 + c_2 r^2, \ r \leq 1. \end{cases}$$

Константы c_1 и c_2 подобраны так, что $u_1 \in C^1$. Отсюда следует: $c_2 = \frac{n-2}{2}$; значение c_1 будет несущественно для дальнейшего. Имеем:

$$\Delta u_1 = 2nc_2 \chi_{B(0,1)} := f_1.$$

Положим:

$$u_m = m^{n-2} u_1(mr).$$

Множитель m^{n-2} обеспечивает равенство

$$u_m = r^{2-n} \text{ при } r > \frac{1}{m}.$$

Задача 5 $u_m \to r^{2-n}$ *в* D'.

Докажем, что последовательность $f_m = \Delta u_m$ пропорциональна δ-образной. Имеем:

$$\Delta u_m = m^{n-2}\Delta u_1(mr)\chi_{B(0,\frac{1}{m})} = n(n-2)m^n\chi_{B(0,\frac{1}{m})} := f_m.$$

$\int f_m$ не зависит от m и равен $n(n-2)v_n = (n-2)\sigma_n$, где v_n - объем единичного шара, σ_n - площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

В силу предложения 1,

$$-\Delta r^{2-n} = (n-2)\sigma_n\delta(x),$$

где $r = |x|$. □

Следствие 1 *Фундаментальное решение уравнения Лапласа в* $\mathbb{R}^n$ *имеет вид:*

$$E(x) = \frac{1}{(2-n)\sigma_n}r^{2-n}, \; r = |x|.$$

При $n = 3$,

$$E(x) = -\frac{1}{4\pi r}.$$

Задача 6 *Сфйормулируйте и докажите аналогичную теорему при* $n = 2$.