Листок 2.6

Комплексное преобразование Фурье

срок сдачи (включая задачи со звёздочкой) 7 июня

Знак (∗) *обозначает, что задача имеет звёздочку только для студентов Совбака.*

Задача 1.(∗) Пусть функция $f = u + iv$ в некоторой области голоморфна и её производная непрерывна. Докажите, что форма $f(z)\,dz$ замкнута, пользуясь уравнениями Коши—Римана: $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$.

Задача 2. Сформулируйте и докажите теорему о голоморфности несобственного интеграла как функции параметра.

Задача 3. Пусть функция f голоморфна в полосе $\Pi_\rho = \{z : |\operatorname{Im} z| \le \rho\}$ и удовлетворяет оценке

$$|f(z)| \le \frac{1}{1+|z|^2}, \quad z \in \Pi_\rho.$$

Докажите, что её преобразование Фурье $\tilde{f}$ экспоненциально убывает на бесконечности и найти показатель экспоненты.

Задача 4.* Функция $f \in C(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$ удовлетворяет условию $\operatorname{supp} f \subset \mathbb{R}^+$. Докажите, что её преобразование Фурье $\tilde{f}$ голоморфно в нижней полуплоскости.

Задача 5. Пусть функция f финитна: $\operatorname{supp} f \subset [-l, l]$. Положим $\tilde{f}_a(\xi) = \tilde{f}(\xi + ia)$, $a \in \mathbb{R}$. Докажите, что $\tilde{f}_a \in L_2(\mathbb{R})$, и оцените сверху $\|f_a\|$.

Задача 6. В условиях предыдущей задачи докажите, что $|\tilde{f}(\xi)| \le Ce^{l\cdot|\operatorname{Im}\xi|}$.

Задача 7.* (Ослабленная версия теоремы Пэли—Винера)
Пусть g — целая функция, причём

$$|g(z)| \le Ce^{l\cdot|\operatorname{Im} z|}.$$

Пусть также существует непрерывная функция G и положительная функция F со сходящимся интегралом, для которых

$$|g(x+iy)| \le G(y)F(x).$$

Докажите, что тогда g является преобразованием Фурье финитной функции с носителем, принадлежащем отрезку $[-l, l]$.

Задача 8. Докажите, что функции $\sin kx$, $k \in \mathbb{N}$ образуют базис в пространстве L_2 на отрезке $[0, \pi]$. Напишите формулу для разложения в ряд Фурье по этому базису

Задача 9. Докажите, что функции $\sin kx \sin ly, k, l \in \mathbb{N}$ образуют базис в пространстве L_2 на квадрате $[0, \pi]^2$. Напишите формулу для разложения в ряд Фурье по этому базису

Задача 10. Докажите следующую общую теорему о полноте. Пусть X и Y — два пространства с мерой μ и ν соответственно. Пусть $\{e_k | k \in \mathbb{N}\}$ и $\{f_l | l \in \mathbb{N}\}$ — полные ортогональные системы в $L_2(X, \mu)$, $L_2(Y, \nu)$. Докажите, что система попарных произведений $\{e_k f_l | (k, l) \in \mathbb{N}^2\}$ полна в пространстве $L_2(X \times Y, \mu \times \nu)$.

Задача 11. Проверьте, что для C^2-гладких начальных условий f и g функция u, заданная формулой Даламбера, удовлетворяет уравнению струны и начальным условиям $u|_{t=0} = f$, $u_t|_{t=0} = g$.

Задача 12. Докажите инвариантность пространства быстро убывающих функций на $\mathbb{R}^n$ относительно преобразования Фурье.