Материалы к семинарам по матанализу (четвёртый семестр)

18–20-я недели (27.05 — 14.06.2019)

Примерные задачи семинаров

Гамма- и бета-функции. Формула Стирлинга.

Гамма-функция при $\operatorname{Re} z > 0$ определяется интегралом

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^t \, dt. \tag{1}$$

Задача 9.1. Докажите, что:
а) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$; б) $\Gamma(n+1) = n!$ при $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Задача 9.2. Докажите, что с помощью формулы $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ гамма-функция продолжается на всю комплексную плоскость за исключением некоторого (какого?) дискретного множества. Найдите вычеты гамма-функции в точках этого множества.

Задача 9.3. Пусть функция z голоморфна на множестве $A \subset \mathbb{C}$, включающем некоторый отрезок I вещественной оси. Пусть $f|_I$ принимает лишь вещественные значения. Докажите, что тогда $f(z) \equiv \overline{f(\overline{z})}$.

Как было доказано на лекции, гамма-функция удовлетворяет *формуле отражения*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \tag{2}$$

Задача 9.4. Докажите, что гамма-функция нигде не обращается в ноль.

Задача 9.5. Вычислите с помощью формулы отражения ($n \in \mathbb{Z}$, $\varphi \in \mathbb{R}$):
а) $\Gamma(\frac{1}{2})$; б) $\Gamma(\frac{1}{2} + i\varphi)$; в) $\Gamma(1 + i\varphi)$; г) $\Gamma(n + \frac{1}{2})$; д) $\Gamma(n + \frac{1}{2} + i\varphi)$; е) $\Gamma(n + i\varphi)$.

Задача 9.6 (доказательство формулы отражения)**.**
а) Найдите Ω — множество тех z, при которых оба значения гамма-функции в левой части определяются равенством (1).
б) Пусть формула отражения известна при всех $z \in \Omega$. Докажите её при остальных z.
в) Запишем при $z \in \Omega$ левую часть (2) как $\int_0^\infty \int_0^\infty s^{-z} t^{z-1} e^{-(s+t)} \, dsdt$. Сделайте в этом интеграле замену $u = s + t$, $v = s/t$ и сведите его к интегралу $\int_0^\infty v^{z-1}/(v+1) \, dv$.
г) Вычислите последний интеграл комплексным методом, рассмотрев кольцо с радиусами $R \to \infty$ и $r \to 0$, разрезанное по отрезку положительной полуоси.
Указание: функция $f(z) = v^\alpha = \exp(\alpha \ln v)$ является многозначной, при обходе вокруг нуля она умножается на некоторое число.

Бета-функция задаётся при $\operatorname{Re} x, y > 0$ интегралом $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} \, dt$.

Задача 9.7. а) Докажите сходимость этого интеграла.
б) Проверьте, что $B(x,y) = B(y,x)$.

Задача 9.8 (связь бета- и гамма-функции)**.** Докажем формулу $B(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.
а) Сделайте в интеграле $\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty \int_0^\infty s^{x-1} t^{y-1} e^{-(x+y)} \, dsdt$ замену $u = s + t$, $v = s/t$.
б) Подберите дробно-линейную замену в получившемся интеграле $\int_0^\infty v^{y-1}/(v+1)^{x+y} \, dv$ и покажите, что он равен $B(x,y)$.

Задача 9.9. Выразите через бета-функцию биномиальный коэффициент C_n^k.

Задача 9.10. Выразите через гамма- и бета-функции следующие интегралы:
а) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^n}, dx$, б) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x\, dx$, в) $\displaystyle\int_0^1 (-\ln x)^p\, dx$, г) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty x^n e^{-x^2/2}\, dx$.

Задача 9.11. а) Докажите формулу для объёма n-мерного шара $V_n(R) = \dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} R^n$, используя теорему Фубини.
б*) Докажите эту же формулу, используя многомерную полярную замену (какой у неё якобиан?).
в) Докажите формулу для площади поверхности $(n-1)$-мерной сферы в $\mathbb{R}^n$: $S_{n-1}(R) = \dfrac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} R^{n-1}$, вычисляя интеграл от функции $e^{-(x_1^2+\dots+x_n^2)/2}$ в евклидовых и полярных координатах.

Задача 9.12* Контур γ на комплексной плоскости с выколотыми точками 0 и 1 строится следующим образом: $\gamma = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$, где контуры $\alpha, \beta \in \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0,1\}, p)$ стартуют из точки $p \neq 0, 1$, доходят почти до точки 0 (или, соответственно, 1), делают вокруг неё один оборот против часовой стрелки и возвращаются обратно в p тем же путём.
а) Нарисуйте контур, гомотопный γ, целиком лежащий в малой окрестности отрезка $[0,1]$.
б) Докажите, что интеграл $\displaystyle\int_\gamma t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt$ определён при любых x, y и не зависит от выбора ветви подынтегральной функции.
в) Докажите, что этот интеграл равен $(1-e^{2\pi i x})(1-e^{2\pi i y})B(x,y)$.

Задача 9.13 (формула Стирлинга)**.**
а) Докажите, что $n! = n^{n+1}e^{-n} \displaystyle\int_{-1}^\infty e^{n(\ln(1+x)-x)}\, dx$.
б) Пусть далее $f(x) = \ln(1+x) - x$. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$\left(\int_{-1}^{-\varepsilon} + \int_\varepsilon^\infty\right) e^{nf(x)}\, dx = O(e^{-\delta n}).$$

в) Воспользовавшись оценкой $f(x) \in [-\frac{1}{2}x^2(1+\gamma), -\frac{1}{2}x^2(1-\gamma)]$, $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, оцените верхний и нижний пределы при $n \to \infty$ для $\sqrt{n} \displaystyle\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{nf(x)}\, dx$.
г) Завершите доказательство формулы Стирлинга:

$$n! = \sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n}(1+o(1)).$$

д*) Воспользовавшись более точной оценкой $f(x) \in [-x^2/2 + ax^3 + (b-\gamma)x^4, -x^2/2 + ax^3 + (b+\gamma)x^4]$, получите более точное выражение $(1 + \frac{1}{12n} + o(\frac{1}{n}))$ для последнего сомножителя в формуле Стирлинга.

Теорема Лебега о точках плотности

Задача 9.14. Пусть A — измеримое множество, μ — мера Лебега.
а) Докажите, что функция $\delta_A(x,\varepsilon) = \dfrac{\mu(A \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon)}{2\varepsilon}$ непрерывна на множестве $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$.
б) Докажите, что функция $d_A^-(x) = \liminf\limits_{\varepsilon \to +0} \delta_A(x,\varepsilon)$ измерима.

Задача 9.15. Приведите пример множества $A \subset \mathbb{R}$, для которого:
а) существует точка $x \in A$ с $d_A(x) = \alpha$ ($\alpha \in [0,1]$ — заданное число);
б) существует точка $x \notin A$ с $d_A(x) = \alpha \in [0,1]$;
в) существует точка $x \in \mathbb{R}$, в которой $d_A(x)$ не определена;
г*) существует счётное множество точек, в которых $d_A(x) \neq \chi_A(x)$;
д*) существует континуальное множество точек, где $d_A(x) \neq \chi_A(x)$;
е*) существует континуальное множество точек, где $d_A(x)$ не определена.

Функции ограниченной вариации

Задача 9.16. Докажите, что для C^1-гладкой функции $\mathrm{Var}_a^b[f] = \int_a^b |f'(x)|\,dx$.

Задача 9.17. Приведите пример непрерывной функции на отрезке, имеющей неограниченную вариацию.

Задача 9.18. Пусть последовательность функций f_n поточечно сходится к функции f на отрезке $[a,b]$. Докажите, что $\mathrm{Var}_a^b f \le \liminf \mathrm{Var}_a^b f_n$. Приведите пример, когда неравенство строгое.

Задача 9.19. Пусть $K(x)$ — канторова лестница. Найдите вариацию на единичном отрезке для функции $K(x) + \lambda x$ ($\lambda \in \mathbb{R}$ — параметр).

Задача 9.20. Пусть $\{x_k\}$ — конечная или счётная последовательность точек на отрезке $[a,b]$, а $\{\alpha_k\}$ и $\{\beta_k\}$ — последовательности чисел, для которых $\sum_k |\alpha_k| + |\beta_k| < \infty$. Рассмотрим функцию скачков

$$f(x) = \sum_k \alpha_k \chi_{[x_k,b]}(x) + \beta_k \chi_{(x_k,b]}(x).$$

а) Докажите, что она корректно определена.
б) Докажите, что она имеет ограниченную вариацию.
в) Докажите, что она непрерывна всюду, кроме точек x_k.

Задача 9.21. Пусть g — функция ограниченной вариации на $[a,b]$ (будем считать, что $g(x) = g(a)$ при $x < a$, $g(x) = g(b)$ при $x > b$).
а) Докажите, что у неё не более чем счётное число точек разрыва.
б) Для каждой точки разрыва x_k определим $\alpha_k = g(x) - g(x_k - 0)$, $\beta_k = g(x+0) - g(x)$. Докажите, что $\sum_k |\alpha_k| + |\beta_k| \le \mathrm{Var}_a^b g$.
в) Докажите, что если определить функцию f как в предыдущей задаче, то функция $g - f$ непрерывна.
г*) Докажите, что $\mathrm{Var}_a^b g = \mathrm{Var}_a^b f + \mathrm{Var}_a^b (g - f)$.
Указание: докажите, что определение вариации не изменится, если в нём x_k можно будет считать не только точками $y \in [a,b]$, но и выражениями вида $y + 0$ и $y - 0$.