Лекция 11

Симметрии действия и законы сохранения

1-я теорема Э. Нётер.

Механическая система считается заданной, если мы имеем конфигурационное многообразие M с выбранными на нём обобщенными координатами q_α, $\alpha=1,\dots,N$, и функцию Лагранжа $L(q,\dot{q},t)$ — функцию на расширенном фазовом пространстве. Идентичные мех. системы задаются семейством лагранжианов

$$\boxed{L^{(\Lambda)}(q,\dot{q},t) := L(q,\dot{q},t) + \frac{d(\Lambda(q,t))}{dt}} \quad (1a),$$

где $\Lambda(q,t)$ — произвольная гладкая ф-ция.

Соответствующие этим лагранжианам функционалы действия

$$\boxed{S^{(\Lambda)}[q(t)] = \int_{t_0}^{t_1} dt\, L^{(\Lambda)}(q,\dot{q},t)} \quad (1b)$$

могут принимать разные значения, но условия их экстремальности идентичны для всех $\Lambda(q,t)$:

$$\boxed{\delta S^{(\Lambda)}[q(t)] = 0 \iff \delta S^{(\Lambda=0)}[q(t)]}$$

Мы займемся изучением преобразований симметрии действия, т.е. таких преобразований траекторий $q_\alpha(t)$ и временного параметра t, которые оставляют функционал S инвариантным.

Будем считать, что эти преобразования образуют однопараметрическое семейство Δ_ε (параметр ε) и обладают групповым свойством ← это естественно для ∀ симметрии

$$\boxed{\begin{aligned} t &\xrightarrow{\Delta_\varepsilon} \tilde{t} = \tau(q, t; \varepsilon) \\ q_\alpha(t) &\xrightarrow{\Delta_\varepsilon} \tilde{q}_\alpha(\tilde{t}) = Q_\alpha(q, t; \varepsilon), \end{aligned}} \qquad (2a)$$

причем $\Delta_0 = id$, то есть

$$\boxed{\begin{aligned} \tau(q, t; 0) &= t \\ Q_\alpha(q, t; 0) &= q_\alpha, \end{aligned}} \qquad (2б)$$

$\Delta_{\varepsilon_1} \circ \Delta_{\varepsilon_2} = \Delta_{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$ — групповое свойство преобразований, в частности:

$$\begin{cases} \tilde{t} \xrightarrow{\Delta_{-\varepsilon}} t = \tau(\tilde{q}, \tilde{t}; -\varepsilon) \\ \tilde{q}_\alpha(\tilde{t}) \xrightarrow{\Delta_{-\varepsilon}} q_\alpha(t) = Q_\alpha(\tilde{q}, \tilde{t}, -\varepsilon) \end{cases}$$

Rem: У любой группы Ли каждому касательному вектору к её единичному элементу можно сопоставить однопараметрическую подгруппу (это делается с помощью, так называемого, экспоненциального отображения). Симметрии действия в механических моделях, зачастую, образуют многопараметрические группы Ли. Рассматриваемая нами группа (2а, в) — это любая однопараметрическая подгруппа такой группы Ли. Число таких "независимых" однопараметрических подгрупп совпадает с размерностью группы Ли.

Rem 2 Мы предполагаем, что $\tilde{t}$ является монотонной (возрастающей) функцией t, т. е.

$$\frac{d\tilde{t}}{dt} = \frac{\partial \tau}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial \tau}{\partial t} > 0 \qquad (3)$$

что, очевидно, выполняется не для $\forall$ траектории $q_\alpha(t)$, если $\frac{\partial \tau}{\partial q_\alpha} \neq 0$ — можно подобрать $\dot{q}_\alpha$ такие, что $\frac{d\tilde{t}}{dt} < 0$. Мы и не рассчитываем применять преобразования симметрии к $\forall$ траекториям, а только к решениям уравнений движения. Для них условие (3) можно проверить a posteriori. Впрочем, обычно на практике $\partial\tau/\partial q_\alpha \equiv 0$.

Def Преобразования (2а, в) называются ~~симметрией действия~~ (1а, в), если можно подобрать функцию $\Lambda(\tilde{q}, \tilde{t}; \varepsilon)$, такую, что

$$\boxed{S^{(\Lambda=0)}[q(t)] = S^{(\Lambda=\Lambda(\tilde{q},\tilde{t};\varepsilon))}[\tilde{q}(\tilde{t})]} \qquad (4)$$

Rem: для дальнейшего потребуется выполнение условия (4) лишь на траекториях движения системы, но обычно проверяют (4) на произвольных траекториях, поскольку решения уравнений движения системы заранее неизвестны

Теорема (1-я теорема Эмми Нётер)

Всякой симметрии (2а, в), (4) действия (1а, в) можно сопоставить закон сохранения / интеграл движения/ системы:

$$\boxed{\frac{d\, I(q, \dot{q}, t)}{dt} \overset{L_\alpha}{=} 0} \qquad (5)$$

имеется в виду что равенство выполняется на решении уравнений движения

$$L_\alpha := \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial}{\partial q_\alpha}\right)L = 0$$

где

$$\boxed{I(q,\dot q,t)=\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}\xi_\alpha+\left(L-\dot q_\alpha\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}\right)\xi_0+\lambda\,,} \qquad (6)$$

$$\xi_\alpha(q,t)=\left.\frac{\partial Q_\alpha}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0},\quad \xi_0(q,t)=\left.\frac{\partial \tau}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0},$$

$$\lambda(q,t)=\left.\frac{\partial \Lambda}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0},$$ Q_α, τ, Λ – функции из (2), (4)

Доказательство:

Согласно условием теоремы функционал

$$\Phi[q(t);\varepsilon]=S^{(\Lambda)}[\tilde q(\tilde t)]-S^{(0)}[q(t)]\equiv 0\,, \qquad (7)$$

причем функцию $\Lambda(\tilde q,\tilde t;\varepsilon)$ естественно (и всегда можно) выбрать таким образом, что $\Lambda(q,t;0)=0$.

Тогда $\Phi[q(t);0]\equiv 0$.

Рассмотрим разложение Φ в ряд по ε в окрестности $\varepsilon=0$. Нас интересует первый, линейный по ε член. Для его вычисления нам потребуются линейные по ε члены в разложении $\tilde t-t$ и $\tilde q-q$:

$$\delta_\varepsilon t=\tilde t-t=\varepsilon\left.\frac{\partial \tau}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}+o(\varepsilon)=\varepsilon\,\xi_0(q,t)+o(\varepsilon)$$

Для $q_\alpha(t)$ можно устроить два вида вариаций по ε:

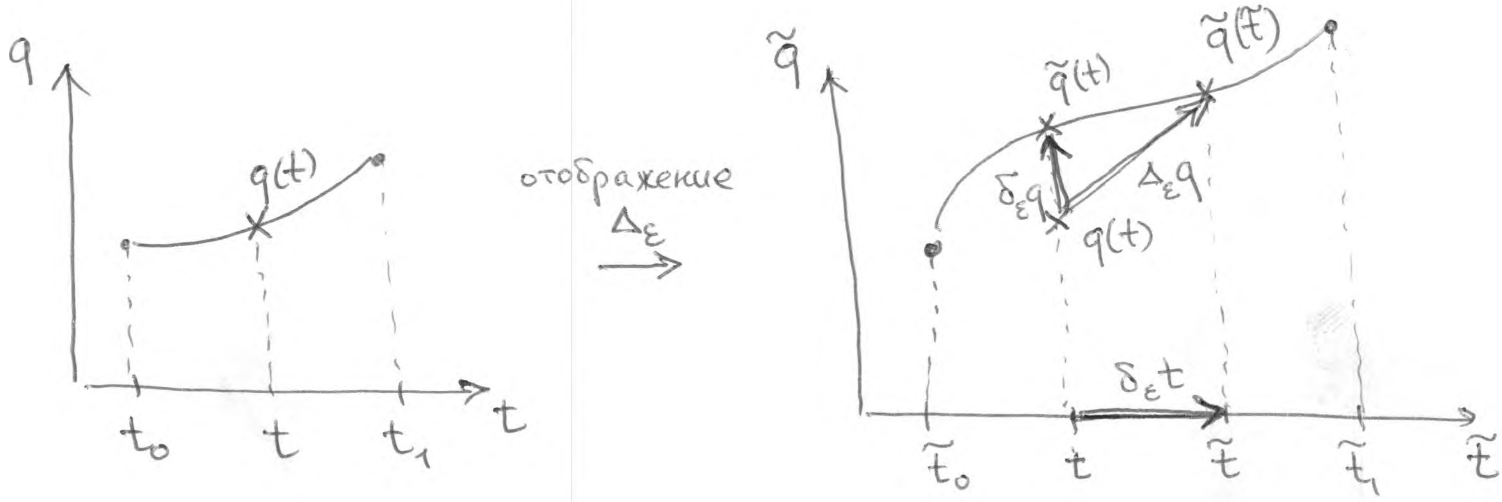
$$\boxed{\Delta_\varepsilon q_\alpha} = \tilde q_\alpha(\tilde t) - q_\alpha(t) = \varepsilon \frac{\partial Q_\alpha}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} + o(\varepsilon) = \varepsilon\, \xi_\alpha(q,t) + o(\varepsilon)$$

и

$$\boxed{\delta_\varepsilon q_\alpha} = \tilde q_\alpha(t) - q_\alpha(t) = -\left(\tilde q_\alpha(\tilde t) - \tilde q_\alpha(t)\right) + \left(\tilde q_\alpha(\tilde t) - q_\alpha(t)\right) =$$

$$= -\frac{d\tilde q_\alpha}{d\tilde t}\Big|_{\tilde t = t} \cdot \delta_\varepsilon t + \Delta_\varepsilon q_\alpha + o(\varepsilon) = \varepsilon\left(\xi_\alpha(q,t) - \xi_0(q,t)\,\dot q_\alpha(t)\right) + o(\varepsilon)$$

Графически вариации $\delta_\varepsilon t$, $\Delta_\varepsilon q$, $\delta_\varepsilon q$ выглядят так:



Теперь вычислим первый член в разложении $\Phi[q(t),\varepsilon]$ в ряд по ε:

$$\Phi[q(t),\varepsilon] = \int_{\tilde t_1}^{\tilde t_2} \left\{ L\left(\tilde q, \frac{d\tilde q}{d\tilde t}, \tilde t\right) + \frac{d(\Lambda(\tilde q,\tilde t))}{d\tilde t} \right\} d\tilde t - \int_{t_1}^{t_2} L\left(q, \frac{dq}{dt}, t\right) dt$$

$$= \Lambda(\tilde q, \tilde t)\Big|_{t_1}^{t_2} + \left(\int_{\tilde t_1}^{t_1} + \int_{t_1}^{t_2} + \int_{t_2}^{t_2} \right) L\left(\tilde q, \frac{d\tilde q}{d\tilde t}, \tilde t\right) d\tilde t - \int_{t_1}^{t_2} L\left(q, \frac{dq}{dt}, t\right) dt$$

$$= \left(\varepsilon \lambda(q,t)\Big|_{t_1}^{t_2} + o(\varepsilon)\right) + \left(L(q, \dot q, t)\, \delta_\varepsilon t \Big|_{t_1}^{t_2} + o(\varepsilon)\right) + \int_{t_1}^{t_2} \left(L\left(\tilde q, \frac{d\tilde q}{dt}, t\right) - L\left(q, \frac{dq}{dt}, t\right)\right) dt$$

$$= \varepsilon\{\lambda + L\cdot\xi_0\}\Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\Big(\frac{\partial L(q,\dot q,t)}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha + \underbrace{\frac{\partial L(q,\dot q,t)}{\partial \dot q_\alpha}\delta\dot q_\alpha\Big)dt}_{\text{интегрировать по частям}} + o(\varepsilon) =$$

$$= \varepsilon\{\lambda + L\cdot\xi_0\}\Big|_{t_1}^{t_2} + \Big(\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}\delta q_\alpha\Big)\Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\underbrace{\Big(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}\Big)}_{\substack{\shortparallel \\ -L_\alpha \text{ — уравнения движения}}}\delta q_\alpha dt + o(\varepsilon)$$

$$\overset{L_\alpha}{=} \varepsilon\Big\{\lambda + L\cdot\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}(\xi_\alpha - \dot q_\alpha\xi_0)\Big\}\Big|_{t_1}^{t_2} + o(\varepsilon)$$

равенство на уравнениях движения

$$\overset{L_\alpha}{=} \varepsilon\, I(q,\dot q,t)\Big|_{t_1}^{t_2} + o(\varepsilon)$$

. По условию теоремы это выражение $= 0$ при $\forall\varepsilon$. Следовательно

$$I(q,\dot q,t)\Big|_{t_1}^{t_2} \overset{L_\alpha}{=} 0,$$

что эквивалентно утверждению теоремы (5) ▨

Разберем несколько примеров применения теоремы Нётер. Все эти примеры связаны с переходами от одной инерциальной системы отсчета к другой.

1) Трансляции.

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{t} &= t \\ \tilde{q}_\alpha &= q_\alpha + \varepsilon_\alpha \end{aligned}} \qquad (8)$$

$\alpha = 1 \dots N$. При каждом значении индекса α имеем независимый параметр преобразования ε_α. Так что здесь N разных трансляций.

Если лагранжиан системы инвариантен относительно преобразований (8), то есть если

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0,$$

то (8) – симметрия действия, и соответствующие интегралы движения (6) имеют вид ($\xi_0 = 0$, $\xi_\beta = \delta_{\alpha\beta}$, $\lambda = 0$)

$$\boxed{P_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}} \qquad (8a)$$

Этот интеграл движения – сохраняющийся импульс системы, отвечающий координате q_α, нам уже знаком

② Трансляции по времени

$$(9)\quad \left\| \begin{array}{l} \tilde{t} = t + \varepsilon \\ \tilde{q}_\alpha = q_\alpha\,, \quad \alpha = 1..N \end{array} \right.$$

Если лагранжиан системы инвариантен относительно преобразований (9), то есть если

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0,$$

то (9) – симметрия действия, а соответствующий интеграл движения (6) имеет вид ($\xi_0 = -1,\ \xi_\alpha = \lambda = 0$)

$$(9)\qquad \boxed{E = L - \dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}}$$

Это – энергия системы – тоже знакомый нам закон сохранения

③ Вращения пространства

Рассмотрим менее тривиальные преобразования, которые образуют неабелеву группу — группу вращений. Вращения – это $\mathbb{R}$-линейные преобразования пространства ($\mathbb{R}^3$ или в более общем случае $\mathbb{R}^N$), сохраняющие Эвклидово скалярное произведение (т.е. расстояние между точками)

Они задаются ортогональными матрицами

$$\boxed{O^T O = \mathrm{id}}$$

Нас интересуют собственные преобразования вращения: $\underline{\det O = 1}$ (без отражений)

Всякое такое преобразование может быть представлено в виде

$$\boxed{O = e^{\Omega}},$$ где

Ω – кососимметрическая матрица: $\Omega^T = -\Omega$.

Действительно, т.к. $\left(e^{\Omega}\right)^T = e^{\Omega^T}$ и $\left(e^{\Omega}\right)^{-1} = e^{-\Omega}$, то условие $\left(e^{\Omega}\right)^T = \left(e^{\Omega}\right)^{-1}$ эквивалентно

$$\boxed{\Omega^T = -\Omega}$$

Семейство преобразований $\underline{O(\tau) = e^{\tau\Omega}}$, где $\Omega^T = -\Omega$, является однопараметрической подгруппой (параметр τ) группы вращений, причем $O(\tau = 0) = \mathrm{id}$. Мы предположим, что лагранжиан мех. системы инвариантен относительно преобразований этого семейства:

(11)

$$(10)\quad \begin{cases} \tilde{t} = t \\ \tilde{q}_\alpha = \left(e^{\tau\Omega}\right)_{\alpha\beta} q_\beta, \quad \Omega_{\alpha\beta} = -\Omega_{\beta\alpha} \end{cases}$$

Соответствующий такой симметрии действия $\left(\xi_0 = \lambda = 0, \ \xi_\alpha = \Omega_{\alpha\beta} q_\beta\right.$, т.к. $\left.\frac{\partial \tilde{q}_\alpha}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0} = \Omega_{\alpha\beta} q_\beta\right)$

интеграл движения (6) имеет вид:

$$(10)\quad \boxed{I = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \Omega_{\alpha\beta} q_\beta = P_\alpha \Omega_{\alpha\beta} q_\beta}$$

Этот интеграл движения — обобщенный момент импульса системы.

Разберем его конструкцию более подробно в $\mathbb{R}^3$:

Пространство кососимметрических 3×3 матриц трёхмерно. Выберем в нём базис

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Соответствующие им вращения $e^{\varphi\omega_i}$ — повороты на угол φ вокруг i-ых координатных осей.

Например:

$$e^{\varphi\omega_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 1 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Произвольная кососимметрическая 3×3 матрица в базисе $\{\omega_i\}$ имеет вид

$$\omega = n_i \omega_i$$

Ей отвечает семейству преобразований

$$\boxed{O(\varphi) = e^{\varphi(n_i \omega_i)}} \qquad (11)$$

Если считать, что n_i – координаты единичного вектора $\vec{n}$: $|\vec{n}| = 1$, то $O(\varphi)$ – это поворот на угол φ вокруг оси вектора $\vec{n}$ (Это так, поскольку $O(\varphi)\vec{n} = \vec{n}$, или $(n_i\omega_i)\vec{n} = 0$, то есть при вращениях $O(\varphi)$ вектор $\vec{n}$ не преобразуется).

Подействуем преобразованием $O(\varphi)$ (11) на радиус-вектор $\vec{r}$ материальной точки в $\mathbb{R}^3$:

$$(11) \quad \left\| \begin{array}{l} \tilde{\vec{r}} = e^{\varphi(n_i\omega_i)}\vec{r} \\ \tilde{t} = t \end{array} \right. , \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\delta\vec{r} = \tilde{\vec{r}} - \vec{r} = \varphi(n_i\omega_i)\vec{r} + o(\varphi) =$$

$$= \varphi \begin{pmatrix} n_2 z - n_3 y \\ n_3 x - n_1 z \\ n_1 y - n_2 x \end{pmatrix} + o(\varphi) = \varphi[\vec{n}, \vec{r}] + o(\varphi)$$

Если лагранжиан системы, в которой "живёт" материальная точка $\vec{r}$ инвариантен относительно преобразований (11), то такой симметрии действия отвечает интеграл движения (6) вида: (13)

$$I = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}, [\vec{n}, \vec{r}]\right) = \left([\vec{n}, \vec{r}], \vec{p}\right), \text{т.е.}$$

импульс материальной точки $\vec{r}$.

$$(11) \quad \boxed{I = \left(\vec{n}, [\vec{r}, \vec{p}]\right)}$$

Это проекция момента импульса материальной точки $\boxed{\vec{M} = [\vec{r}, \vec{p}]}$ на ось $\vec{n}$.

Вывод: всякому преобразованию перехода между инерциальными системами отсчёта соответствует ВАЖНЫЙ закон сохранения:

А) трансляциям (однородность пространства) — закон сохранения импульса системы

Б) трансляции времени (однородность времени) — закон сохранения энергии системы

В) вращениям (изотропность пространства) — закон сохранения момента импульса системы

Заметим, что у каждой конкретной системы могут быть свои специфические симметрии, помимо тех, что гарантированы постулатом о множестве инерциальных систем отсчета (принцип относительности). Таким спец. симметриям будут по теореме Нётер соответствовать специфические интегралы движения. (14)

А что же с переходом в равномерно и прямолинейно движущуюся инерциальную систему отсчёта? Соответствующие преобразования имеют вид

$$(12)\quad \left\|\begin{aligned}\tilde{\vec{r}} &= \vec{r} + \vec{v}\,t \\ \tilde{t} &= t\end{aligned}\right. ,\quad \vec{v} = \overrightarrow{\text{const}}$$

вектор с параметрами преобразования

На примере лагранжиана свободной частицы $L(\dot{\vec{r}}) = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2}$ видим, что он не инвариантен относительно таких преобразований

$$L(\dot{\tilde{\vec{r}}}) = \frac{m}{2}\dot{\tilde{\vec{r}}}^{\,2} = L(\dot{\vec{r}}) + m(\vec{v}, \dot{\vec{r}}) + \frac{m}{2}\vec{v}^{\,2}$$

Чтобы действие свободной частицы имело (12) своей симметрией, надо ввести Λ-поправку к лагранжиану (см. (1), (4)):

$$(12)\quad \left\|\ \Lambda(\vec{r}) = -m(\vec{v}, \vec{r})\right.$$

Тогда соответствующий интеграл движения (6) примет вид ($\xi_0 = 0$, $\xi_\alpha = \vec{v}t$, $\lambda = -m(\vec{v},\vec{r})$, если $\vec{v} = \varepsilon\vec{v}$, ε – параметр 1-параметрической группы (2)):

$$(12)\quad \boxed{I = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}, \vec{v}t\right) - m(\vec{v},\vec{r}) = m(\vec{v}, \dot{\vec{r}}(t)\cdot t - \vec{r}(t))}$$

Если продифференцировать этот интеграл движения по времени:

$$0 = \frac{dI}{dt} = m(\vec{v}, \ddot{\vec{r}}\cdot t + \cancel{\dot{\vec{r}}} - \cancel{\dot{\vec{r}}}) = m(\vec{v}, \ddot{\vec{r}})t -$$

получаем утверждение, что проекция $\ddot{\vec{r}}$ на направление $\vec{v}$ зануляется, то есть $const = m(\vec{v}, \dot{\vec{r}}) = (\vec{v}, \vec{p})$ – проекция импульса частицы $\vec{p}$ на направление $\vec{v}$ сохраняется.

Таким образом преобразования (12) не дают независимых интегралов движения, они копируют законы сохранения импульса

Теорема Нётер не гарантирует независимость интегралов движения, отвечающих независимым преобразованиям симметрии.