Лекция 16 - 19. Гамма-функция Эйлера: продолжение

Этот конспект соответствует лекции, прочтенной 31 мая 2019.

1 Убывание Γ-функции в направлении мнимой оси

Вот еще одно свойство Γ-функции, которое выводится непосредственно из определения.

Теорема 1 Γ-*функция убывает в направлении мнимой оси быстрее любой степени. Это убывание равномерно в любой полосе Re* $z \in [a, b]$.

Доказательство **Краткое доказательство:** ограничение Γ-функции на прямую, параллельную мнимой оси – это преобразование Фурье быстро убывающей функции.

Подробное доказательство. Рассмотрим сначала случай $0 < a < b$. Фиксируем x и пусть $z = x - \alpha i$. Имеем:

$$\Gamma(x - i\alpha) = \int_{\mathbb{R}} (e^{-x\tau} e^{-e^{\tau}}) e^{-i\alpha\tau} d\tau.$$

При любом $x > 0$, функция

$$h_x : \tau \mapsto e^{-x\tau} e^{-e^{\tau}} -$$

- быстро убывающая. Функция $\Gamma(x - i\alpha)$ - ее преобразование Фурье. Следовательно, функция $\Gamma(x - i\alpha)$ – тоже быстро убывающая. Легко доказать равномерность этого убывания по $x \in [a, b]$. Быстрое убывание в полосе $\mathrm{Re}\, z \in [a, b]$ при $a < 0$ выводится из предыдущего и формулы сдвига. □

2 Основные результаты

Γ-функция удовлетворяет многим замечательным соотношениям. Вот одно из них.

Теорема 2 *Справедлива следующая формула отражения:*

$$\Gamma(z)\Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}. \tag{1}$$

Отметим, что на прошлой лекции и в начале этой мы воспользовались определением Γ-функции ровно три раза: при выводе формулы сдвига, при мероморфном продолжении Γ-функции на плоскость и при доказательстве того, что Γ-функция убывает в любой вертикальной полосе. Оказывается, что эти три свойства, вместе с $\Gamma(z) = 1$, задают Γ-функцию однозначно.

Теорема 3 *Всякая функция G, голоморфная в правой полуплоскости $\mathbb{C}^+ : Re\ z > 0$, удовлетворяющая формуле сдвига:*

$$G(z+1) = zG(z),$$

и убывающая на бесконечности в любой вертикальной полосе, совпадает с Γ-функцией, при условии $G(1) = 1$:

$$G(z) \equiv \Gamma(z).$$

3 Общий подход

Пусть F -функция, про которую мы хотим доказать, что она постоянна. Для этого достаточно доказать, что F голоморфна на всей сфере Римана. В теореме 2

$$F(z) = \Gamma(z)\Gamma(1-z)\sin \pi z.$$

В теореме 3,

$$F(z) = \frac{G(z)}{\Gamma(z)}.$$

В обоих случаях мы будем использовать свойства периодических целых (голоморфных на всем $\mathbb{C}$) функций.

4 1-периодические голоморфные функции

Начнем с примера: $f(z) = \sin 2\pi z$. Это - голоморфная функция с периодом 1. Она ограничена на вещественной оси, но не ограничена на мнимой, где она "почти равна" синусу гиперболическому:

$$f(iy) = \frac{\operatorname{sh} 2\pi y}{i}.$$

Отметим, что

$$\frac{|f(iy)|}{e^{2\pi|y|}} \to \frac{1}{2} \text{ при } y \to \pm\infty.$$

Оказывается, что это - минимально допустимая скорость роста непостоянной 1-периодической голоморфной функции.

Теорема 4 *Если 1-периодическая целая функция f растет медленнее $e^{2\pi|y|}$ в вертикальном направлении:*

$$\frac{|f(x+iy)|}{e^{2\pi|y|}} \to 0 \text{ при } y \to \pm\infty$$

то она постоянна:

$$f \equiv const.$$

Эта теорема немедленно следует из теоремы об устранимой особенности.

Теорема 5 *Пусть f - голоморфная функция в проколотом круге с центром 0, и $\lim_{\zeta\to 0} f(\zeta)\zeta = 0$. Тогда f голоморфно продолжается в 0.*

Эта теорема доказывается в курсе комплексного анализа.
Доказательство [теоремы 4] Функция $g(\zeta) = f\left(\frac{\ln\zeta}{2\pi i}\right)$ голоморфна на $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus 0$ и однозначна (не меняется при обходе нуля) поскольку f 1-периодична. Далее,

$$\lim \zeta g(\zeta) = \lim_{\Im z\to\infty, \Re z\in[1,2]} e^{2\pi i z} f(z) = 0$$

по условию теоремы. Значит, функция g голоморфно продолжается в 0. Аналогично, g голоморфно продолжается в точку ∞. Следовательно, g голоморфеа на сфере Римана, значит, постоянна. $\square$

5 Формула отражения

Доказательство

$$F(z) = \Gamma(z)\Gamma(1-z)\sin\pi z \equiv \pi.$$

Шаг 1. Голоморфность функции F. Функция Γ имеет простые полюса в точках $n\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$ и только в них. Функция $\Gamma(1-z)$ голоморфна в этих точках. Функция $\Gamma(1-z)$ имеет простые полюса в точках $n\in\mathbb{N}$ и только в них. Функция Γ голоморфна в этих точках. Следовательно, при $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$,

$$\mathrm{Res}_{-n}\Gamma(z)\Gamma(1-z) = (\mathrm{Res}_{-n}\Gamma)\Gamma(1+n) = \frac{(-1)^n}{n!}n! = (-1)^n.$$

Аналогично, при $n\in\mathbb{N}$,

$$\mathrm{Res}_n\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \mathrm{Res}_n\Gamma(1-z)\Gamma(n) = (-1)^n.$$

Следовательно, при целых n

$$\Gamma(n+h)\Gamma(1-(n+h)) = \frac{(-1)^n}{h} + O(1).$$

Функция $\sin\pi z$ обращается в ноль в целых точках:

$$\sin\pi(n+h) = (-1)^n\pi h + o(h).$$

Следовательно,

$$F(n+h) = \pi + O(h).$$

Значит, функция F - целая.

Шаг 2. Периодичность F. Функция F периодична с периодом 1. Действительно, $\sin\pi(z+1) = -\sin\pi(z)$. Кроме того,

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

$$\Gamma(1-(z+1)) = \Gamma(-z) = \frac{\Gamma(-z+1)}{-z}.$$

Следовательно, $\Gamma(z+1)\Gamma(1-(z+1)) = -\Gamma(z)\Gamma(1-z)$. Поэтому $F(z+1) = F(z)$.

Шаг 3. Функция F постоянна.

Функция $F(z)$ 1-периодична.

Функция $\Gamma(z)\Gamma(1-z)$ убывает в вертикальной полосе $x \in [1,2]$, а функция $\sin\pi z$ растет как $e^{\pi|y|}$. Значит, функция $F(z)$ растет в этой полосе медленнее, чем $e^{\pi|y|}$. По теореме 4 она константа. Ее значение в целых точках равно π. Это доказывает теорему отражения. □

Формула обращения позволяет вычислить $\Gamma(\frac{1}{2})$. Действительно, подставляя в формулу отражения $z = \frac{1}{2}$, получаем: $\Gamma^2(\frac{1}{2}) = \pi$.

Следствие 1 $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

6 Аксиоматическое описание Γ-функции

Доказательство

Γ-функция нигде не обращается в 0. Это свойство достаточно проверить для $z \notin \mathbb{Z}$, поскольку в целых точках значения Γ-функции известны. При $z \notin \mathbb{Z}$,

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z}.$$

Правая часть конечна и отлична от нуля, и оба множителя в левой части конечны. Следовательно, ни один из них не равен нулю.

Рассмотрим функцию

$$F(z) = \frac{G(z)}{\Gamma(z)}.$$

Она голоморфна в правой полуплоскости. В силу формулы сдвига, она 1-периодична:

$$F(z+1) = \frac{G(z+1)}{\Gamma(z+1)} = \frac{zG(z)}{z\Gamma(z)} = F(z).$$

Исследуем рост этой функции в вертикальных полосах. Из формулы отражения и стремления Γ-функции к нулю в вертикальных полосах, получаем:

$$|\Gamma(x+i\alpha)| > \frac{C}{|\sin\pi(x+i\alpha)|} > C'e^{-\pi|\alpha|}.$$

Более подробно,

$$|\Gamma(x+i\alpha)||\Gamma(1-(x+i\alpha))| = \frac{\pi}{|\sin\pi(x+i\alpha)|}$$

Второй сомножитель в левой части ограничен сверху некоторой константой C_1. Поэтому

$$|\Gamma(x+i\alpha)| > \frac{\pi}{C_1|\sin\pi(x+i\alpha)|}$$

Следовательно,

$$|F(x+iy)| = \left|\frac{G(x+iy)}{\Gamma(x+iy)}\right| < ce^{\pi|y|}.$$

Из теоремы 4 следует теперь, что эта функция - константа. Поскольку $G(1) = \Gamma(1) = 1$, $F \equiv 1$, $G \equiv \Gamma$.

□