Лекция 18 - 19. Дифференцируемость функций одного переменого

1 Обзор результатов

Пусть f - суммируемая неотрицательная функция одного переменного на отрезке $E = [0,1]$. Пусть μ_f - мера с плотностью f, и F - ее производящая функция:

$$F(x) = \int_0^x f(t)d\mu, \tag{1}$$

где μ - мера Лебега. Верно ли, что

$$F'(x) = f(x)?$$

Теорема 1 *(теорема Лебега о дифференцировании интеграла по верхнему пределу) В сделанных выше предположениях, равенство*

$$F'(x) = f(x) \tag{2}$$

верно почти всюду.

Пусть теперь F - производящая функция произвольной меры на отрезке. Существует ли суммируемая функция f, для которой верна формула (2)?

Теорема 2 *Всякая монотонная функция дифференцируема почти всюду.*

Однако формула Ньютона - Лейбница

$$F(1) - F(0) = \int_0^1 F'(t)d\mu$$

для произвольной монотонной функции F, вообще говоря, неверна. Возьмем в качестве F функцию Кантора K. Ее производная почти всюду равна нулю. Однако

$$1 = K(1) - K(0) \neq \int_0^1 K'(x)dx = 0.$$

2 Как найти производную, не пользуясь ее определением?

Возьмем произвольную монотонно возрастающую функцию F и рассмотрим порожденную ей меру Стилтьеса μ_F. Применим к ней теорему о разложении меры:

$$\mu_F = \alpha + \sigma + \delta,$$

где α абсолютно непрерывна относительно меры μ, σ сингулярна относительно μ, но не имеет атомов, δ дискретна. По теореме Радона - Никодима, мера α имет плотность f относительно меры Лебега. Эта плотность и есть производная функции F: $F' = f$. Производная F' найдена. Перейдем к обоснованию формулы (**??**). Нам не нужна теорема о разложении меры во всех деталях; достаточно только того, что

$$\mu_F = \alpha + \beta,$$

где $\beta = \sigma + \delta$ - мера, ортогональная лебеговой. Возьмем производящие функции F_α и F_β мер α и β:

$$F_\alpha = \alpha([0,x]) = \int_0^x f(t)dt, \;\; F_\beta(x) = \beta([0,x]).$$

Лемма 1 *Производящая функция меры, ортогональной мере Лебега, имеет почти всюду нулевую производную.*

Эта лемма немедленно следует из леммы о нулевой производной. доказанной на предыдущей лекции. Напомноим ее.

Лемма 2 *Пусть β - мера на отрезке, F - ее производящая функция. Пусть X - множество положительной меры Лебега, β-мера которого равна нулю. Тогда п.в. на X в смысле меры Лебега $F' = 0$.*

Пусть C - множество из определения ортогональных мер: $\mu(C) = 1, \;\; \beta(C) = 0$. Полагая в лемме 2 $X = C$, получаем лемму 1.

По теореме 1 и лемме 1,

$$F' = F'_\alpha + F'_\beta = f$$

почти всюду.

Теорема 2 по модулю теоремы 1 доказана.

3 Дифференцирование интеграла по верхнему пределу: доказательство теоремы Лебега для ограниченных функций

Теорема 1 следует из теоремы о точках плотности. Докажем это сначала для случая, когда f - характеристическая функция множества X положительной меры Лебега. В этом случае

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \mu([0,x] \cap X).$$

Следовательно,

$$\frac{F(x+\varepsilon) - F(x)}{\varepsilon} = \frac{\mu([x, x+\varepsilon] \cap X)}{\varepsilon}$$

Задача 1 *Если x - точка плотности множества X, то это частное стремится к 1 при $\varepsilon \to 0$. Аналогично, если x - точка плотности дополнения к X, то $F'(x) = 0$.*

Окончательно,

$$F' = \chi_X = f$$

почти всюду. Переходя от характеристических функций к произвольным суммируемым через простые функции, получим окончательное доказательство. Оно элементарно для ограниченных функций и требует дополнительной идеи для неограниченных.

Формула (2) распространяется с характеристических функций на ограниченные простые по линейности.

Пусть теперь f_n и g_n - две последовательности конечных простых функций, равномерно сходящиеся к ограниченной функции $f \geq 0$, причем $f_n \nearrow f$, $g_n \searrow f$. Пусть

$$F_n(x) = \int_0^x f_n d\mu, \ G_n(x) = \int_0^x g_n d\mu, \ F(x) = \int_0^x f d\mu.$$

Тогда $F_n' \leq F' \leq G_n'$ там, где все эти производные определены. По доказанному выше, п.в.

$$F_n' = f_n, G_n' = g_n.$$

По лемме о двух милиционерах, получаем (2). Это заканчивает доказательство теоремы 1 для ограниченных измеримых функций.

4 Доказательство теоремы Лебега для неограниченных функций

Остается рассмотреть случай неограниченных суммируемых функций. Здесь не удается просто обойтись предельным переходом от срезок к самой функции; нужно воспользоваться леммой 2.

Пусть $f \geq 0$ - суммируемая функция, $f^N \nearrow f$ - последовательность ее N- срезок;

$$F_N(x) = \int_0^x f^N d\mu, F(x) = \int_0^x f d\mu$$

В силу абсолютной непрерывности интеграла, $F_N \rightrightarrows F$ п. в.

Обозначим через X_N множество, где $f^N = f$. Тогда $X_N \nearrow$ при $N \nearrow \infty$, и

$$\mu(C(\cup X_N)) = 0. \tag{3}$$

Рассмотрим меру β_N с производящей функцией $F - F_N$. Тогда $\beta_N(X_N) = \int_{X_N}(f - f_N)dx = 0$. Из леммы 2 о нулевой производной следует, что

$$(F - F_N)' = 0$$

п.в. на X_N. Но на X_N п.в.

$$F' = F_N' = f^N = f.$$

Следовательно, п.в. на $\cup X_N$ выполнена формула (2). В силу (3), это доказывает теорему.

5 Функции ограниченной вариации

Этот раздел не был рассказан на лекции.

Определим теперь более широкий класс функций, дифференцируемых почти всюду.

Определение 1 *Вариация функции f на отрезке σ, обозначаемая $var\ _\sigma f$, определяется следующим образом. Пусть P - произвольное разбиение отрезка σ:*

$$P = \{x_0 < x_1 < ... < x_n\},$$

x_0 и x_n совпадают с левым и правым концом отрезка σ соответственно. Тогда

$$var\ _\sigma f = \sup_P \Sigma_1^n |f(x_j) - f(x_{j-1}|. \tag{4}$$

Задача 2 *1. Вариация C^1-функции f на отрезке $[0,1]$ не превосходит $\max_{[0,1]} |f'|$.*

Задача 3 *Пусть $0 \leq a < b < c \leq 1$. Тогда*

$$var\ _{[a,b]}f + \ var\ _{[b,c]}f = \ var\ _{[a,c]}f.$$

Задача 4

$$var\ _{[a,b]} \geq |f(b) - f(a)|.$$

Определение 2 *Если вариация функции на отрезке конечна, то эта функция называется* функцией ограниченной вариации *(на этом отрезке).*

Теорема 3 *Класс функций ограниченной вариации совпадает с классом функций, представимых в виде разности двух монотонных.*

Доказательство То, что разность двух монотонных функций является функцией ограниченной вариации - очевидно. Докажем обратное.

Положим:

$$v_f(x) = \text{ var }_{[0,x]} f.$$

Очевидно, эта функция монотонно возрастает. Положим: $\varphi = v_f - f$. Тогда $f = v_f - \varphi$. Докажем, что функция φ тоже монотонно возрастает. Пусть $0 \leq a < b \leq 1$ Тогда

$$\varphi(b) - \varphi(a) = v_f(b) - f(b) - v_f(a) + f(b) = \text{ var }_{[a,b]} f - (f(b) - f(a)) \geq 0,$$

что и требовалось. □

Теорема 4 *Всякая функция с ограниченной вариацией дифференцируема почти всюду.*

Эта теорема немедленно следует из теорем 2 и 3.

Откажемся теперь от требования неотрицательности функции f в теореме 1. Тогда $f = f^+ - f^-$, где f^+ и f^- - неотрицательные функции, и $f^+, f^- = 0$. Интегралы

$$F^+(x) = \int_0^x f^+(t)dt \text{ и } F^- = \int_0^x f^-(t)dt$$

- монотонные функции, их разность $F = F^+ - F^-$ - функция с ограниченной вариацией. Из теоремы 1 следует теперь

Теорема 5 *Пусть f - произвольная суммируемая функция, и F ее интеграл с переменным верхним пределом* (1). *Тогда соотношение* (2) *выполняется почти всюду.*