Лекция 17-19. Теорема о точках плотности

Эта и следующая лекция могут быть названы “Цветы одномерной теории меры.” Теорема о точках плотности относится к теории многомерной меры Лебега. Она помещена здесь, поскольку будет использоваться в одномерном случае.

1 Формулировка теоремы

Обозначим через $B_{a,\varepsilon}$ открытый шар с центром a и радиусом ε, через $V(\varepsilon)$ - его объем.

Определение 1 *Плотностью множества X в точке a называется предел*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mu(X\cap B_{a,\varepsilon})}{V(\varepsilon)} = d_{X,a},$$

если этот предел существует.

Определение 2 *Точка a называется точкой плотности для X, если*

$$d_{X,a} = 1.$$

Определение 3 *Нижней плотностью множества X в точке $a \in X$ называется*

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\frac{\mu(X\cap B_{a,\varepsilon})}{V(\varepsilon)} = d^-_{X,a}$$

В отличие от плотности, нижняя плотность всегда существует.

Теорема 1 *(Теорема Лебега о точках плотности). Почти все точки измеримого по Лебегу множества являются точками плотности.*

В дальнейшем без ограничения общности мы будем считать, что X - множество конечной меры.

2 План доказательства.

Для каждого $\alpha \in (0,1)$ назовем *нижним α-множеством* множество

$$X^-_\alpha = \{a | d^-_{X,a} < 1-\alpha\}.$$

Лемма 1 *[об измеримости] Всякое нижнее α-множество измеримо.*

Эта лемма доказана ниже.

Наша задача - доказать, что каждое такое множество имеет меру 0. Но мы предположим, что это не так и придем к противоречию. Для этого приблизим нижнее α-множество элементарным. Это последнее множество A можно выбрать так, что в нем доля множества X_α будет меньше, чем $1-\alpha c(n)$, где $c(n)$ - константа, зависящая от размерности. Тем самым, A приближает X_α^- с точностью, не лучшей, чем

$$\varepsilon_0 = \alpha c(n)\mu(A)$$

а должно приближать с любой точностью - противоречие.

3 Построение множества A и доказательство теоремы о точках плотности

Покроем множество X_α^- открытым множеством (обозначим его U) так, что

$$\mu(U \setminus X_\alpha^-) < \varkappa; \tag{1}$$

Число $\varkappa$ может быть выбрано сколь угодно малым; точный выбор сделан ниже. Для любого множества положительной меры существуетего замкнутое подмножество положительной меры; поэтому множество X_α^- можно с самого начала считать замкнутым. Покроем каждую точку множества X_α^- шаром, доля множества X в котором меньше $1-\alpha$ и который принадлежит U. Выберем из этого покрытия конечное подпокрытие; соответствующее множество шаров обозначим V.

Лемма 2 *[о частичном покрытии] Из любого конечного покрытия шарами замкнутого множества $Z \in \mathbb{R}^n$ положительной меры можно выбрать подмножество шаров W, обладающее следующими свойствами:*

шары из множества W попарно не пересекаются;

их общий объем превышает $3^{-n}\mu(Z)$.

Эта лемма доказана ниже.

Возьмем множество шаров $W = \{Q_j\}$, описанное в лемме. Для него выполнено неравенство (2). Но в каждом шаре Q_j доля множества X не больше, чем $1-\alpha$; следовательно

$$\mu(Q_j \setminus X) \geq \alpha\mu(Q_j).$$

Значит

$$\mu(\sqcup Q_j \setminus X) \geq \alpha\Sigma\mu Q_j \geq \alpha 3^{-n}\mu(X).$$

Возьмем теперь в неравенстве (1) $\varkappa < \alpha 3^{-n}\mu(X)$. Это противоречит принадлежности $\sqcup Q_j \subset U$.

Теорема о точках плотности по модулю лемм 1 и 2 доказана.

4 Доказательство леммы о частичном покрытии

Это доказательство похоже на решение олимпиадной задачи (XXI Московская математическая Олимпиада, 1958, второй тур, молва приписывала ее Арнольду).

Задача 1 *Рассмотрим произвольный многоугольник Z на плоскости. Пусть m - максимальное число попарно непересекающихся кругов радиуса $\frac{1}{2}$, центры которых принадлежат Z. Пусть M - минимальное число кругов радиуса 1, покрывающих Z. Какое из этих двух чисел больше?*

Ответ: $m \geq M$. **Доказательство** Рассмотрим m попарно непересекающихся кругов радиуса $\frac{1}{2}$, центры которых принадлежат Z. Раздуем каждый из них в два раза, то есть заменим его концентрическим кругом радиуса 1. Эти круги покравают Z. Действительно, если бы какая-то точка оказалась непокрытой. то круг с центром в этой точке и радиусом $\frac{1}{2}$ не пересекал бы ранее выбранных кругов радиуса $\frac{1}{2}$. Это противоречит определению числа m. □

Доказательство Лемма доказывается индукцией по числу выбираемых шаров.

База: возьмем шар (один из шаров) наибольшего радиуса. Обозначим его Q_1.

Шаг: пусть множество попарно непперсекающихся шаров $Q_1, \ldots, Q_k$ уже построено. Возьмем наибольший из шаров покрытия V, не пересекающийся ни с одним из шаров $Q_j,\ j = 1, \ldots, k$. Если такой шар один, обозначим его Q_{k+1}. Если таких шаров несколько, возьмем любой из них и обозначим его Q_{k+1}. В обоих случаях продолжим процесс по индуции. Если такого шара нет, положим: $W = \{Q_1, \ldots, Q_k\}$; процесс заканчивается. Поскольку число шаров покрытия V конечно, процесс оборвется. Полученную совокупность шаров обозначим $W = \{Q_1, \ldots, Q_m\}$. Докажем, что

$$\mu(\cup_1^m Q_j) \geq 3^{-n}\mu(Z). \tag{2}$$

Для этого раздуем каждый из открытых шаров в 3 раза; из шара Q_j получится шар $\tilde{Q}_j$. Докажем, что $\cup \tilde{Q}_j \supset Z$.

Предположим противное. Тогда существует точка $a \in Z$, не принадлежащая никакому из шаров множества W. Между тем, она покрыта шаром из множества V; возьмем один такой шар и обозначим его Q.

Пусть шар Q не пересекает ни одного из шаров покрытия W. Тогда он должен был в это покрытие войти - противоречие.

Пусть шар Q пересекает шары покрытия W. Пусть $Q_0 \in W$ - шар наибольшего радиуса r, пересекающий Q. Расстояние от точки a до центра O шара Q_0 больше или равно $3r$. Рассмотрим траугольник с вершинами O, a и $b \in Q_0 \cap Q$. По неравенству треугольника, $|ab| > 2r$. Значит, шар Q содержит отрезок длины $2r$ строго внутри (шары открытые). Поэтому его радиус больше r. Следовательно, шар Q должен был быть выбран вместо Q_0 при построении W - противоречие.

Итак, объединение шаров $\tilde{Q}_j$ покрывает Z. Отсюда следует (2). □

5 Лемма о нулевой производной

Здесь доказана лемма, которая понадобится нам на следующей лекции.

Лемма 3 *Пусть β - мера на отрезке, F - ее производящая функция. Пусть X - множество положительной меры Лебега, β-мера которого равна нулю. Тогда п.в. на X в смысле меры Лебега $F' = 0$.*

Доказательство

Предположим, что лемма неверна. Напомним, что для каждой функции f на отрезке всюду определена ее верхняя производная, которая может быть и бесконечной:

$$f'_+ = \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}.$$

Наше предположение означает, что подмножество X, на котором $F'_+ \neq 0$ имеет положительную меру Лебега. Мы приведем это предположение к противоречию.

Задача 2 *Докажите, что "множество δ- крутизны" любой измеримой функции F*

$$X_\delta = \{x \in X | F'_+(x) > \delta\}$$

измеримо.

Наше предположение означает, что существует такое $\delta > 0$, что множество X_δ имеет положительную меру Лебега. Без ограничения общности можно считать, что X_δ замкнуто. Покроем множество X_δ открытым множеством U таким, что

$$\beta(U) < \varkappa. \tag{3}$$

Поскольку $\beta(X_\delta) = 0, \varkappa$ может быть выбрано сколь угодно малым; точный выбор сделан ниже.

Для каждой точки $x \in X_\delta$ выберем интервал $U_x \subset U$ с центром x и радиусом ε (зависящим от x) такой, что

$$\frac{F(x+\varepsilon) - F(x)}{\varepsilon} > \delta.$$

$$\beta(U_x) = F(x+\varepsilon) - F(x-\varepsilon) > \varepsilon\delta = \frac{1}{2}|U_x|\delta.$$

Получим покрытие множества X_δ. Из полученного покрытия выберем конечное подпокрытие V интервалами. По лемме о частичном покрытии, существует дизъюнктное объединение W интервалов покрытия V такое, что

$$\mu(W) > \frac{1}{3}\mu(X_\delta). \tag{4}$$

По определению интервалов из множества W, β-мера каждого из них не меньше, чем половина его длины, умноженная на δ. Следовательно, в силу (4),

$$\beta(W) \geq \frac{1}{2}\delta\mu(W) \geq \frac{1}{6}\delta\mu(X_\delta).$$

Но мы могли выбрать открытое множество U так, что $\beta(U) < \varkappa < \frac{1}{6}\delta\mu(X_\delta)$ - противоречие.

$\square$

6 Доказательство леммы 1 об измеримости

Эта часть не рассказывалась на лекции.

Докажем измеримость множества X_α^-. Как будет показано ниже, множество X_α^- - борелевское, и следовательно измеримое.

Пусть $x \in X_\alpha^-$. Тогда для каждого n существует $\varepsilon < \frac{1}{n}$:

$$\frac{\mu(X_\alpha^- \cap B_{x,\varepsilon})}{V(\varepsilon)} < 1 - \alpha.$$

Обозначим через $Y_{n,k}$ множество

$$Y_{n,k} = \{a : \exists\, \varepsilon < \frac{1}{n} : \frac{\mu(X \cap B_{a,\varepsilon})}{V(\varepsilon)} < 1 - \alpha - \frac{1}{k}\}.$$

Легко видеть, что множество $Y_{n,k}$ открыто. Положим:

$$Z_{n,k} = Y_{n,k} \cap X_\alpha^-,\ W_k = \cap_n Y_{n,k}.$$

Докажем, что $X_{\alpha^-} = \cup W_k$. Действительно, для каждого $a \in X_\alpha^-$ выполнено соотношение: $d_{X,a}^- < 1 - \alpha - \frac{1}{k}$ для некоторого k. Поэтому $X_\alpha^- \subset \cup W_k$. С другой стороны, множество W_k содержит все точки $a \in X_\alpha^-$, для которых выполнено соотношение: $d_{X,a}^- < 1 - \alpha - \frac{1}{k}$ и некоторые точки $a \in X_\alpha^-$, для которых выполнено соотношение: $d_{X,a}^- = 1 - \alpha - \frac{1}{k}$. Следовательно, $X_\alpha^- \supset \cup W_k$.

Итак, X_α^- - борелевское, и следовательно измеримое множество.