Программа коллоквиума по матанализу за четвертый семестр
(20, 25.06.2019)

В начале коллоквиума отвечающий получит три вопроса из минимального списка формулировок и определений. На эти вопросы нужно будет ответить без подготовки. При незнании хотя бы одного из них коллоквиум завершается с оценкой «1».

Далее отвечающий получит три теоретических вопроса и одну задачу из списков, приведённых ниже. При этом вопросы и задачи с одной звёздочкой необязательны для студентов Совбака, а с двумя звёздочками — для всех: студент может попросить заменить их на обязательные для него пункты того же списка. В задачах, помеченных словом «**(целиком)**», за одну задачу считаются все пункты, в остальных задачах один пункт — это одна задача.

При ответе на теоретический вопрос нужно без подготовки сформулировать соответствующие теоремы и все необходимые определения. Для решения задачи даётся 30 минут студентам-«математикам» и 40 минут студентам Совбака. Определения, не упомянутые в программе явно, нужно формулировать там, где они впервые (по нумерации вопросов в списке) необходимы.

Минимальный список определений и формулировок к коллоквиуму

1. Пространство L_1
2. Пространство L_2
3. Пространство $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ и сходимость в нём
4. Пространство $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ и сходимость в нём
5. Дельта-образная последовательность
6. Дельта-функция
7. Гамма-функция
8. Ряд Фурье функции из $L_2[-\pi, \pi]$ по системе экспонент: формула для коэффициентов
9. Преобразование Фурье на прямой
10. Связь преобразования Фурье для функций f и f'
11. Производная функции $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Теоретические вопросы

1. Определение пространства $L_2(\mathbb{R})$ через пополнение пространства C_2^0. Формулировка теоремы о пополнении
2. Явное описание пространства $L_2(\mathbb{R})$
3. Неравенство Коши-Буняковского в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ и его связь с неравенством $|\cos x| \leq 1$
4. Общий вид линейного функционала на евклидовом пространстве
5. Общий вид линейного ограниченного функционала на пространстве $L_2(\mathbb{R})$
6. Определение гильбертова пространства. Теорема Рисса о базисе
7. Ортогональность систем из тригонометрических функций и экспонент на окружности
8. Полнота этих систем (с полными формулировками теорем Вейерштрасса о приближении)
9. Разложение в ряд Фурье по базисам из тригонометрических функций и экспонент на окружности
10. Убывание коэффициентов Фурье и равномерная сходимость рядов Фурье для гладких функций к ним самим
11. δ-образные последовательности и представление с их помощью непрерывных функций
12. δ-образные последовательности вида $C_n \varphi^n(x)$ и $n\varphi(nx)$
13. Определение преобразования Фурье финитных непрерывных функций. Скорость убывания преобразования Фурье финитных функций класса C^m.
14. Равенство Планшереля для преобразования Фурье финитных гладких функций.

15. Формула обращения для преобразования Фурье финитных гладких функций.
16. Продолжение нормированного преобразования Фурье на пространство $L_2(\mathbb{R})$ как изометрии. Равенство Планшереля.
17. Какой формулой задается продолженное преобразование Фурье на пространстве $L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$?
18. Ряды Фурье для голоморфных функций: экспоненциальное убывание коэффициентов
19. Функция Гаусса – неподвижная точка преобразования Фурье
20. ** Вычисление преобразования Фурье с помощью вычетов
21. Выражение частной суммы ряда Фурье через ядро Дирихле
22. Лемма Римана и поточечная сходимость ряда Фурье к непрерывно дифференцируемой функции
23. ** Сходимость ряда Фурье к кусочно непрерывной и кусочно дифференцируемой функции
24. Свертка: два определения и простейшие свойства
25. Преобразование Фурье от свертки и произведения
26. * Задача Коши для уравнения теплопроводности на прямой: формула Пуассона
27. * Задача Коши для волнового уравнения на прямой: формула Даламбера
28. Полнота системы E и ряды Фурье на многомерном торе
29. Суммирование по решетке и абсолютная сходимость рядов Фурье
30. ** Равенство Планшереля для многомерного преобразования Фурье
31. Гладкость и убывание коэффициентов Фурье для функций на многомерном торе
32. Формула обращения для многомерного преобразования Фурье
33. Гладкость и убывание преобразования Фурье
34. ** Пространство быстро убывающих функций и его инвариантность относительно преобразования Фурье

Обобщенные функции

35. Пространство основных функций: определение, примеры, сходимость
36. ** Описание всех сферически симметричных гармонических функций в $\mathbb{R}^3$.
37. Определение и сходимость обобщенных функций. Сходимость δ-образной последовательности обычных функций к δ-функции в D'
38. ** Построение δ-образной последовательности f_n в $L_1(\mathbb{R}^3)$ и последовательности $u_n \in C^1(\mathbb{R}^3)$: $\Delta u_n = f_n$.
39. Обычные функции как обобщенные. Дифференцирование обобщенных функций и его связь с дифференцированием обычных функций.
40. Пространства $D(\mathbb{R}^n)$ и $D'(\mathbb{R}^n)$. Сходимость в них.
41. * Фундаментальные решения линейных уравнений с постоянными коэффициентами.
42. * Фундаментальные решения и их применение к решению неоднородных уравнений.
43. ** Фундаментальное решение уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^3$

Г-функция

44. Определение и голоморфность Г-функции в области $\operatorname{Re} z > 2$.
45. Формула сдвига. Мероморфное продолжение Г-функции на всю плоскость.
46. Полюса и вычеты Г-функции.
47. Убывание Г-функции на бесконечности в вертикальных полосах.
48. Лемма о росте для 1-периодических голоморфных функций.
49. Формула отражения.
50. Аксиоматическое описание Г-функции.

Задачи

Задача 1.9* Пусть степенной ряд сходится в $L_2[-1,1]$. Оцените снизу его радиус сходимости.

Задача 1.10. Докажите, что следующие линейные функционалы ограничены в $L_2(\mathbb{R})$ и найдите их нормы:
а) $\varphi \mapsto \int_{-1}^{1} \varphi(x)\,dx$, б) $\varphi \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} \sin x\varphi(x)\,dx$, в) $\varphi \mapsto \int_{-1}^{1} x^n\varphi(x)\,dx$.

Задача 1.11. (целиком) Проверьте ортогональность следующих систем:
а) $E = \{e^{inx}, n \in \mathbb{Z}\}$ в $L_2[-\pi,\pi]$;
б) $SC = \{1, \sin(nx), \cos(nx), n \in \mathbb{N}\}$ в $L_2[-\pi,\pi]$;
в) $S = \{\sin(nx), n \in \mathbb{N}\}$ в $L_2[0,\pi]$.
Указание: попробуйте свести в) к б), а б) к а).

Задача 2.4. (целиком) Найдите последовательности многочленов $(p_n(x))_{n=0}^{\infty}$, равномерно приближающие следующие функции на указанных отрезках:
в) e^x на $[-a,a]$ $(a>0)$; г) $\ln x$ на $[1/2, 3/2]$, на $[0{,}1, 0{,}9]$ и на $[0{,}5, 2{,}5]$.

Задача 2.6. (целиком)
а) Разложите в ряд Тейлора функцию $f(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ и докажите, что его частные суммы равномерно сходятся к f на любом отрезке $|x| \le a < 1$.
б) Та же задача для $F(x) = \arcsin x$.
Указание: сведите б) к а).

Задача 3.1. Разложите в ряд Фурье (по какому базису удобнее?) функцию $\operatorname{sgn} x$ на отрезке $[-\pi,\pi]$.

Задача 3.2. Пользуясь предыдущей задачей, найдите сумму ряда Лейбница: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$.

Задача 3.3. Докажите, что ряд Фурье функции из $L_2[-\pi,\pi]$ с нулевым средним можно почленно интегрировать: если

$$f(x) = \sum_{k\neq 0} a_k e^{ikx}, \qquad g(x) = \int_0^x f(t)\,dt,$$

то

$$g(x) = \sum_{k\neq 0} \frac{1}{ik} a_k (e^{ikx} - 1).$$

Задача 3.5. Разложите в ряд Фурье функцию x на отрезке $[-\pi,\pi]$.

Задача 3.8. (целиком)
а) Докажите, что если коэффициенты Фурье убывают как $n^{-1-\varepsilon}, \varepsilon > 0$, то сумма ряда — непрерывная функция.
б) Докажите, что если коэффициенты Фурье убывают как $n^{-k-\varepsilon}, \varepsilon > 0$, то сумма ряда — $(k-1)$ раз непрерывно дифференцируемая функция.

Задача 3.11. (целиком) Вычислите преобразование Фурье для следующих функций:
г) $\cos x \cdot \chi_{(-\pi/2,\pi/2)}(x)$; е) $e^{-a|x|}$.

Задача 3.12. а) Вычислите преобразование Фурье для функции $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2}$, используя теорему Коши о вычетах.

Задача 4.2. Выведите следующие алгебраические свойства преобразования Фурье $f(x) \to \hat{f}(\lambda)$:
а) $x \to i\frac{d}{d\lambda}$, $\frac{d}{dx} \to i\lambda$,
б) $g(x) = f(x-a) \Rightarrow \hat{g}(\lambda) = e^{-i\lambda a}\hat{f}(\lambda)$, $g(x) = e^{iax}f(x) \Rightarrow \hat{g}(\lambda) = \hat{f}(\lambda - a)$,
в) $g(x) = f(ax) \Rightarrow \hat{g}(\lambda) = \frac{1}{|a|}\hat{f}(\frac{\lambda}{a})$,
г) преобразование Фурье переводит (не)четные функции в (не)четные.

Задача 4.6. (целиком) Используя интегралы в комплексной области и вычеты, найдите преобразования Фурье следующих функций, являющихся преобразованиями Фурье «табличных» функций:
а) $\dfrac{1}{x \pm ia}$ $(\operatorname{Re} a > 0)$, б) $\dfrac{1}{x^2 + a^2}$ $(a > 0)$.

Задача 5.2* (целиком) а) Докажите, что для любой функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ отображение

$$T : \mathbb{R} \to L_2(\mathbb{R}),\ T(a)(x) = f(x+a)$$

непрерывно. (Указание: использовать преобразование Фурье.)
б) Докажите, что свертка двух функций $f, g \in L_2(\mathbb{R})$ корректно определена и является непрерывной функцией.

Задача 5.4. г) Найдите свертку $f * g$ и её преобразование Фурье для функций $f(x) = e^{-x^2/2}$, $g(x) = e^{-(ax+b)^2/2}$.

Задача 5.5. в) Пусть f — ограниченная непрерывная (не обязательно финитная) функция на $\mathbb{R}$, Δ_n — произвольная δ-образная последовательность. Докажите, что $f * \Delta_n \rightrightarrows f$ на любом отрезке.

Задача 5.9. б) Докажите, что пространство быстро убывающих функций

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid x^n f^{(m)}(x) \to 0 \text{ при } x \to \infty\}$$

бесконечномерно.

Задача 5.10. а, б) Докажите, что пространство быстро убывающих функций образует алгебру над $\mathbb{R}$ относительно стандартных арифметических операций и замкнуто относительно дифференцирования.

Задача 6.5. (целиком) Докажите, что для достаточно гладкой функции $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ верно:
а) $\mathcal{F}(D_k f) = i\alpha_k \mathcal{F}(f)$, б) $\mathcal{F}(D^a f) = (i\alpha)^a \mathcal{F}(f)$ (a — мультииндекс).

Задача 6.6. При каких значениях α следующие функции f принадлежат $L_2(\mathbb{R}^n)$:
а) $f = (1+r)^\alpha$; б) $f = r^\alpha \chi_{\{r \le 1\}}$; в) $f = r^\alpha$; г) $f(x,y) = (1+|xy|)^\alpha$, $n = 2$?

Задача 6.9. Найдите многомерное преобразование Фурье следующих функций:
а) $f(x_1, \ldots, x_n) = \chi_{\{|x_1|, \ldots, |x_n| \le 1\}}$,
б) $f(x_1, \ldots, x_n) = e^{-\frac{1}{2}||x||^2}$.

Задача 6.10. Пусть $\det C \neq 0$. Докажите, что $\mathcal{F}(f(Cx)) = \det(C^{-1})\mathcal{F}(f)(C^{-1})^T\alpha)$.
Как упрощается эта формула при $C \in SO(n)$?

Задача 6.11. Найдите многомерное преобразование Фурье следующих функций:
а) $f(x,y) = e^{-\frac{3x^2 - 2xy + 3y^2}{2}}$,
б) $f(x,y) = \chi_{\{|x+y|, |x-y| \le 1\}}$.

Задача 6.19. Постройте с помощью формулы Даламбера решения со следующими начальными условиями и опишите качественно их поведение, нарисовав «мультфильм» — последовательность графиков $u(x,t)$ при различных t:
в) $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = \chi_{[-a,a]}(x)$,
г) $u(x,0) = \max(0, 1 - |x|)$, $u_t(x,0) = 0$.

Задача 6.20. (целиком) Будем решать задачу Коши для волнового уравнения $u_{tt} = u_{xx}$ на полупрямой $[0, +\infty)$.
б) Зададим *краевое условие* $u(0,t) = 0$ (конец струны неподвижно закреплён). Найдите соответствующее решение $u(x,t)$.
в) Тот же вопрос для краевого условия $u_t(0,t) = 0$ (конец струны скользит без трения по вертикальному стержню).

Задача 6.21.* (целиком) а) Найдите все решения волнового уравнения на прямой, имеющие вид $u(x,t) = X(x)T(t)$ (стоячие волны).
б) Какие из этих решений удовлетворяют условиям $u(0,t) = u(L,t) = 0$? Сравните два описания соответствующего решения — как суммы волн, бегущих влево и вправо, и как стоячей волны.

Задача 6.25. Докажите, что оператор $\mathcal{F}$ (нормированного) преобразования Фурье на пространстве $L^2(\mathbb{R})$ не может иметь собственных функций с собственными значениями, отличными от ± 1 и $\pm i$.

Задача 7.2. (целиком) Найдите собственные функции оператора Лапласа d^2/dx^2 на отрезке $[0,l]$ со следующими граничными значениями: а) $u(0)=0$, $u(l)=0$; в) $u'(0)=0$, $u'(l)=0$.

Задача 7.5. Докажите, что задача Коши для уравнения теплопроводности на окружности длины 2π с начальным условием класса C^2 имеет решение вида $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx-k^2t}$, где $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ — ряд Фурье для начального условия.

Задача 7.7. а) Решите задачу Коши для уравнения теплопроводности на окружности длины 2π с начальным условием $u(x,0) = \sin^3 x$.

Задача 7.15. а) Выразите моменты функции $f(x)$ (т.е. величины $\int_{\mathbb{R}} x^n f(x)\,dx$ для целых $n \geq 0$) через коэффициенты Тейлора в нуле её преобразования Фурье.
б) Пусть $f(x)$ — финитная абсолютно интегрируемая функция. Докажите, что преобразование Фурье $\hat{f}(\lambda)$ продолжается до целой функции (т.е. голоморфной на всей комплексной плоскости).
в) Пусть $f(x) = 0$ при $x < 0$ и $|f(x)| < Ce^{-ax}$ при $x > 0$, где $a > 0$. Докажите, что в этом случае преобразование Фурье $\hat{f}(\lambda)$ продолжается до функции, аналитической в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda < a$.

Задача 7.16. Докажите, что преобразование Фурье функции $f(x)$ с $|f(x)| < Ce^{-a|x|}$ голоморфно в полосе $|\operatorname{Im}\lambda| < a$.

Задача 8.2. (целиком) Докажите, что:
а) свертка основной и непрерывной функции — бесконечно гладкая функция,
б) свертка основной и финитной непрерывной функции — основная функция.

Задача 8.4.* Постройте основную функцию, тождественно равную 1 в окрестности нуля.
Указание: используйте функцию $f(x) = \chi_{[0,+\infty)} e^{-\frac{1}{x^2}}$.

Задача 8.7. Докажите, что любая дельта-образная последовательность сходится к дельта-функции в D'.

Задача 8.8.* Постройте дельта-образную последовательность, состоящую из основных функций.

Задача 8.10. Постройте последовательность кусочно-постоянных функций, которая сходится в D':
а) к δ', б)* к δ''.

Задача 8.15. Докажите, что если $f_n \to f$ в $L_1(\mathbb{R})$, то $f_n \to f$ в D'.

Задача 8.17.* Пусть $f \in D', g \in C^\infty$. Докажите формулу Лейбница: $(fg)' = fg' + f'g$.

Задача 9.1. (целиком) Докажите, что:
а) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$; б) $\Gamma(n+1) = n!$ при $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Задача 9.2. Докажите, что с помощью формулы $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ гамма-функция продолжается на всю комплексную плоскость за исключением некоторого (какого?) дискретного множества. Найдите вычеты гамма-функции в точках этого множества.

Задача 9.4. Докажите, что гамма-функция нигде не обращается в ноль.

Задача 9.5. г) Вычислите с помощью формулы отражения $\Gamma(n+\frac{1}{2})$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Задача 9.6. б) Пусть формула отражения известна при $\operatorname{Re} z \in (0,1)$. Докажите её при остальных z.