

**Лемма о рукопожатиях.** Сумма степеней всех вершин графа чётна и равна удвоенному количеству рёбер.

**Следствие.** Число нечётных вершин графа всегда чётно.

### Догоняющие

1. Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?
2. В классе 30 человек. Может ли быть так, что 9 их них имеют по 3 друга (в этом классе), 11 - по 4 друга, а 10 - по 5 друзей?
3. Джон, приехав из Диснейленда, рассказывал, что там, на заколдованном озере имеются 7 островов, с каждого из которых ведет 1, 3 или 5 мостов. Верно ли, что хотя бы один из этих мостов обязательно выходит на берег озера?
4. На конференцию приехало 100 ученых. Во время церемонии открытия каждый пожал руку пяти другим. Сколько рукопожатий было совершено?

### Бегущие

5. В некоторой стране из каждого города выходит ровно 2012 дорог, причём из любого города можно по дорогам добраться до любого другого. Террористы взорвали одну из дорог. Докажите, что и после этого можно из любого города добраться до любого (возможно, с пересадками). *Подсказка.* Метод «от противного». Предположим, что есть города А и В, и из города А нельзя добраться в город В даже с пересадками.
6. В городе отличников есть несколько площадей. От каждой площади отходит ровно 5 улиц. Каждая улица, начинаясь от некоторой площади, ведет до другой площади и там заканчивается. Докажите, что число площадей чётно, а число улиц делится на 5.

### Убегающие

7. В стране Оз есть много городов, некоторые из которых соединены дорогами. Каждая из дорог вымощена либо жёлтым кирпичом, либо красным, либо зелёным. Известно, что из Изумрудного города выходит ровно одна дорога, а из всех остальных городов — по три дороги. Докажите, что в стране Оз есть город, из которого выходят две дороги одного цвета.
8. Можно ли соединить 15 телефонов проводами 14 различных цветов так, чтобы от каждого телефона отходило 14 проводов разных цветов?
9. Докажите, что связный граф, степень каждой вершины которого чётна, при удалении любого ребра остается связным.
10. В школе 953 ученика. Одни из них знакомы, другие не знакомы друг с другом. Докажите, что хотя бы у одного из них число знакомых среди учеников этой школы чётно.