

# Делимость-1

- Пусть есть простое число  $p$ , не равное 2. Докажите, что для любых трех положительных  $n < p$ ,  $m < p$ ,  $r < p$ , таких что  $m \neq r$ , числа  $n^*m$  и  $n^*r$  имеют разные остатки от деления на  $p$ .  
Доказательство: Пусть это не так, тогда  $(n^*m - n^*r)$  делится на  $p$ . То есть  $n^*(m-r)$  делится на  $p$ . Но так как  $p$  простое значит либо  $n$  делится на  $p$ , либо  $(m-r)$  делится на  $p$ . Но  $n < p$  и  $(m-r) < p$ . Противоречие.
1. Пусть  $x$  и  $y$  – различные простые числа. Сколько делителей у числа  
(а)  $xy$ ; (б)  $(x^2)^*y$ ; (в)  $(x^2)^*(y^2)$ ; (г)  $(x^n)^*(y^m)$ ?
  2. Для новогодних подарков приготовили 184 мандарина и 138 яблок. Какое наибольшее число подарков можно подготовить, чтобы по содержанию все подарки были одинаковы? Сколько в этих подарках будет мандаринов и яблок?
  3. Натуральное число умножили последовательно на каждую из его цифр. Получилось 1995. Найдите исходное число.
  4. Дети, построенные парами, возвращаются с вечернего чая с пряниками в карманах. В каждой паре у одного пряников вдвое больше, чем у другого. Может ли они у всех вместе быть ровно 1000 пряников?
  5. На доске написано число 1. Каждую секунду к числу на доске прибавляют сумму его цифр. Может ли через некоторое время на доске появиться число 123456?
  6. (\*) Пусть есть простое число  $p$ , не равное 2. Докажите, что для любого положительного  $n < p$  существует единственное положительное  $m < p$ , такое что  $n^*m$  имеет остаток 1 от деления на  $p$ .
  7. (\*) Пусть есть простое число  $p$ , не равное 2. Докажите, что для любого положительного  $a < p$  число  $a^{(p-1)}$  имеет остаток 1 от деления на  $p$ . (Малая теорема Ферма)
  8. Целые числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  дают при делении на 5 остатки 1, 2, 4 соответственно. Какие остатки при делении на 5 дают числа: (а)  $a + b + c$ ; (б)  $2a - 3b + 5c$ ?
  9. Дети делили апельсины. Оказалось, что ни на 5, ни на 3, ни на 4 человека апельсины не делятся поровну. Но когда попугай Кеша съел один из апельсинов, оставшееся количество уже можно было поделить и на 5, и на 3 человека, а на 4 все еще нет. Сколько же было апельсинов, если известно, что их было меньше 40?
  10. (а\*) Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 5 дает остаток 4, при делении на 7 дает остаток 6, а при делении на 11 — остаток 10.  
(б) Найдите наименьшее натуральное число, которое делится на 3, при делении на 25 дает остаток 22, при делении на 10 — остаток 7.
  11. При делении некоторого числа  $m$  на 13 и 15 получили одинаковые частные, но первое деление было с остатком 8, а второе без остатка. Найдите число  $m$ .

12. Маша поссорилась с Петей, поэтому решила порвать его фотографию. Сначала она разорвала ее на 8 кусков. Потом взяла один из кусочков и разорвала его еще на 8 кусков, затем снова взяла один из кусочков и разорвала на 8, и так далее. Успокоившись, Машенька пересчитала кусочки.
- (а) Могло ли их оказаться ровно 2019 кусочков?
  - (б) Какое наименьшее число кусочков могло получиться, если известно, что их количество выражается четырёхзначным числом?