Делимость-2

• Пусть есть простое число p, не равное 2. Докажите, что для любых трех положительного $n<p$, $m<p$, $r<p$, таких что $m=/=r$, числа $n*m$ и $n*r$ имеют разные остатки от деления на p. Доказательство: Пусть это не так, тогда $(n*m – n*r)$ делится на p. То есть $n*(m–r)$ делится на p. Но так как p простое значит либо n делится на p, либо $(m–r)$ делится на p. Но $n<p$ и $(m-r)<p$. Противоречие.

1. Пусть x и y – различные простые числа. Сколько делителей у числа
   а) xy; б) (x^2)*y; в) (x^2)*(y^2); г) (x^n)*(y^m)?

2. Натуральное число умножили последовательно на каждую из его цифр. Получилось 777. Найдите исходное число.

3. Дети, построенные парами, возвращаются с вечернего чая с пряниками в карманах. В каждой паре у одного пряников вдвое больше, чем у другого. Может ли они у всех вместе быть ровно 20 пряников?

4. С числом, написанным на доске, можно выполнять следующие операции: умножать на два или как угодно переставлять цифры (нельзя только ставить ноль в начало). На доске написано число 1. Можно ли с помощью таких операций получить число 74?

5. (*) На доске написано число 1. Каждую секунду к числу на доске прибавляют сумму его цифр. Может ли через некоторое время на доске появиться число 123456?

6. (*) Пусть есть простое число p, не равное 2. Докажите, что для любого положительного $n<p$ существует единственное положительное $m<p$, такое что $n*m$ имеет остаток 1 от деления на p.

7. Пусть a при делении на 7 дает остаток 5. Какие остатки при делении на 7 дают числа
   (а) $a + 5$; (б) $a + 2014$; (в) $2a$; (г) $3a + 15$; (д) $–a$; (е) $−a + 6$?

8. Целые числа a, b и c дают при делении на 5 остатки 1, 2, 4 соответственно. Какие остатки при делении на 5 дают числа: (а) $a + b + c$; (б) $2a – 3b + 5c$?

9. Дети делили апельсины. Оказалось, что ни на 5, ни на 3, ни на 4 человека апельсины не делятся поровну. Но когда попугай Кеша съел один из апельсинов, оставшееся количество уже можно было поделить и на 5, и на 3 человека, а на 4 все еще нет. Сколько же было апельсинов, если известно, что их было меньше 40?

10. (а*) Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 5 дает остаток 4, при делении на 7 дает остаток 6, а при делении на 11 — остаток 10.
    (б) Найдите наименьшее натуральное число, которое делится на 3, при делении на 25 дает остаток 22, при делении на 10 — остаток 7.

11. (*) При делении некоторого числа m на 13 и 15 получили одинаковые частные, но первое деление было с остатком 8, а второе без остатка. Найдите число m.

12. (*) Маша поссорилась с Петей, поэтому решила порвать его фотографию. Сначала она разорвала ее на 8 кусков. Потом взяла один из кусочков и разорвала его еще на 8 кусков, затем снова взяла один из кусочков и разорвала на 8, и так далее. Успокоившись, Машенька пересчитала кусочки.
(а) Могло ли их оказаться ровно 2019 кусочков?
(б) Какое наименьшее число кусочков могло получиться, если известно, что их количество выражается четырёхзначным числом?