ТИгр

Листок 1 (Знакомство)

Математические игры отличаются от обычных тем, что в них можно заранее определить исход игры. В подобных задачах обычный вопрос один и тот же: кто и как выиграет при правильной игре, т.е. при наилучшей стратегии обеих сторон. Далее в условиях задач это оговариваться не будет.

Задача 1. Двое играют в следующую игр. Имеется три кучки камней: в первой – 10, во второй – 15, в третьей – 20. За ход разрешается разбить любую кучу камней на две меньшие; проигрывает тот, кто не сможет сделать ход.
Задача 2. Двое по очереди ломают шоколадку 6x8. За ход разрешается сделать прямолинейный разлом любого из кусков вдоль углубления. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход.
Задача 3. Двое по очереди ставят ладей на шахматную доску так, чтобы те не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.
Задача 4. На доске написаны 10 единиц и 10 двоек. За ход можно стереть две любые цифры и, если они были одинаковыми, написать 2, а если разными – 1. Если последняя оставшаяся на доске цифра – 1, то выиграл первый игрок, если 2 – второй.
Задача 5. Двое игроков по очереди расставляют между числами от 1 до 20, выписанными в строчку, «+» и «-». После того, как все места заполнены, считается результат. Если он четен, то выигрывает первый игрок, если нечетен – второй.
Задача 6. а)В строчку написаны 10 единиц. Леша и Витя по очереди ставят между какими-нибудь соседними числами знак: «+» или «-». После того, как все места заполнены, считается результат. Если он четен, то выигрывает Леша, если нечетен – Витя.
б)А если ребята ставят между числами либо «+», либо «х». (при вычислении результата сначала выполняются умножения, затем – сложения)
Задача 7. Вася и Петя выписывают 12-значное число, ставя цифры по очереди, начиная со старшего разряда. Докажите, что какие бы цифры он не писал, Петя всегда может добиться, чтобы получившееся число делилось на 4.
Задача 8. Двое выписывают шестизначное число, выставляя по очереди по одной цифре, начиная со старшего разряда. Если получившееся число делится на 7, то выигрывает сделавший последний ход, иначе – начинающий.
Задача 9. В одном ящике лежат 15 синих шаров, а в другом – 12 белых. Одним ходом каждому разрешается взять три синих шара или два белых. Выигрывает тот, кто берет последние шары.
Задача 10. Фили и Кили играют в шахматы. Кроме шахматной доски у них есть одна ладья, которую они поставили в правый нижний угол, и делают ей ходы по очереди, причем ходить разрешается только вверх или влево (на любое количество клеток). Кто не может сделать хода, тот проиграл. Кили ходит первым. Кто выиграет при правильной игре?
Задача 11. Двое по очереди ставят слонов на шахматное поле так, чтобы слоны не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.
Задача 12. Двое по очереди ставят коней на шахматное поле так, чтобы кони не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Листок 2 (ТИгр)

Задача 1. Двое по очереди ставят королей в клетки доски 9x9 так, чтобы короли не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.
Задача 2. Дана клетчатая доска 10x10. За ход разрешается покрыть любые две соседние клетки доминошкой (прямоугольником 1x2) так, чтобы доминошки не перекрывались. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.
Задача 3. В каждой клетке доски 11x11 стоит шашка. За ход разрешается снять с доски любое число идущих подряд шашек либо из одного вертикального, либо из одного горизонтального ряда. Выигрывает съевший последнюю шашку.
Задача 4. Имеется две кучи камней по 11 в каждой. За ход разрешается взять любое количество камней, но только из одной кучки. Проигрывает тот, кому нечего брать.
Задача 5. Имеются три кучи камней. Число камней во всех кучах одинаково. Двое играющих берут по очереди любое число камней из любой кучи, но только из одной. Выигрывает тот, кто берет последние камни.
Задача 6. Имеется две кучи камней: в одной – 30, в другой – 20. За ход разрешается брать любое число камней из любой кучи, но только из одной. Выигрывает тот, кто берет последние камни.
Задача 7. Двое игроков по очереди отрывают лепестки у ромашки, у которой а)12; б)11 лепестков. За ход разрешается оторвать либо один, либо два соседних лепестка. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.
Задача 8. Имеется 10 фишек: 2 белых, 2 черных, 2 красных, 2 зеленых, 2 синих. Игроки А и Б по очереди ставят по одной фишке в одной из вершин 10-угольника. Игрок А хочет получить 5 последовательных вершин всех пяти цветов, а игрок Б хочет этому помешать. Игру начинает Б.
Задача 9. Имеется 8 шаров: по 2 красных, синих, белых и черных. Игроки А и Б по очереди прибивают по 1 шару в вершины куба. Игрок А стремиться к тому, чтобы нашлась вершина, чтобы в ней и трех соседних имелись бы шары всех четырех цветов, а Б хочет этому помешать.
Задача 10. Двое, А и Б, играют в такую игру: поочередно называют целые положительные числа, причем игрок А называет число не больше 10, игрок Б называет число, превосходящее число, названное игроком А, но не более, чем на 10 и т.д. Выигрывает тот, кто назовет число 100.
Задача 11. За ход разрешается взять из коробка с 300 спичками не более половины имеющихся в нем спичек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.
Задача 12. Игра начинается с числа 60. За ход разрешается уменьшить имеющееся число на любой из его делителей. Проигрывает тот, кто получит 0.
Задача 13. Игра начинается с числа 1000. За ход разрешатся вычесть из имеющегося числа любое, не превосходящее его, натуральное число, являющееся степенью двойки (в том числе 1). Выигрывает тот, кто получит 0.
Задача 14. 5 ямок расположены в ряд. В каждой лежит по шарику. За ход разрешается переложить все шарики из какой-нибудь ямки в соседнюю справа ямку. Проигрывает тот, кто не может сделать ход (когда все шарики лежат в самой правой ямке).

Листок 3

Задача 1. Два игрока, Паша и Вова, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Паша. За один ход игрок может добавить в кучу 1 камень или 10 камней. Например, имея кучу из 7 камней, за один ход можно получить кучу из 8 или 17 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 31. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 31 или больше камней.
В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 30.
Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока — значит, описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника.
Выполните следующие задания. Во всех случаях обосновывайте свой ответ.
1. а) Укажите все такие значения числа S, при которых Паша может выиграть в один ход. Обоснуйте, что найдены все нужные значения S, и укажите выигрывающие ходы.
б) Укажите такое значение S. при котором Паша не может выиграть за один ход, но при любом ходе Паши Вова может выиграть своим первым ходом. Опишите выигрышную стратегию Вовы.
2. Укажите два значения S, при которых у Паши есть выигрышная стратегия, причём Паша не может выиграть за один ход, но может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Вова. Для указанных значений S опишите выигрышную стратегию Паши.
3. Укажите значение S, при котором у Вовы есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Паши, однако у Вовы нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом. Для указанного значения S опишите выигрышную стратегию Вовы. Постройте дерево всех партий, возможных при этой выигрышной стратегии Вовы (в виде рисунка или таблицы). На ребрах дерева указывайте, кто делает ход, в узлах — количество камней в куче.

Задача 2. Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один или два камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 16, 17 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней.
Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 24. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 24 или больше камней. В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 23.
Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока — значит, описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника.
Выполните следующие задания. Во всех случаях обосновывайте свой ответ.
1. а) Укажите все такие значения числа S, при которых Петя может выиграть в один ход. Обоснуйте, что найдены все нужные значения S, и укажите выигрывающий ход для каждого указанного значения S.
б) Укажите такое значение S, при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом. Опишите выигрышную стратегию Вани.
2. Укажите два таких значения S, при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём (а) Петя не может выиграть за один ход и (б) Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня. Для каждого указанного значения S опишите выигрышную стратегию Пети.
3. Укажите значение S, при котором:
— у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети, и
— у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.
Для указанного значения S опишите выигрышную стратегию Вани. Постройте дерево всех партий, возможных при этой выигрышной стратегии Вани (в виде рисунка или таблицы). На рёбрах дерева указывайте, кто делает ход, в узлах — количество камней в куче.

Задача 3. Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, пусть в одной куче 10 камней, а в другой 7 камней; такую позицию в игре будем обозначать (10, 7). Тогда за один ход можно получить любую из четырёх позиций: (11, 7), (20, 7), (10, 8), (10, 14). Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 73. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, что в кучах всего будет 73 камня или больше.

Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока – значит, описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника. Например, при начальных позициях (6, 34), (7, 33), (9, 32) выигрышная стратегия есть у Пети. Чтобы выиграть, ему достаточно удвоить количество камней во второй куче.

Задание 1. Для каждой из начальных позиций (6, 33), (8, 32) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. В каждом случае опишите выигрышную стратегию; объясните, почему эта стратегия ведёт к выигрышу, и укажите, какое наибольшее количество ходов может потребоваться победителю для выигрыша при этой стратегии.

Задание 2. Для каждой из начальных позиций (6, 32), (7, 32), (8, 31) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. В каждом случае опишите выигрышную стратегию; объясните, почему эта стратегия ведёт к выигрышу, и укажите, какое наибольшее количество ходов может потребоваться победителю для выигрыша при этой стратегии.

Задание 3. Для начальной позиции (7, 31) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. Опишите выигрышную стратегию; объясните, почему эта стратегия ведёт к выигрышу, и укажите, какое наибольшее количество ходов может потребоваться победителю для выигрыша при этой стратегии. Постройте дерево всех партий, возможных при указанной Вами выигрышной стратегии. Представьте дерево в виде рисунка или таблицы.