Листок 0. Индукция. Элементарная комбинаторика.

Листок можно сдать только целиком за один раз, при этом перед сдачей листка студент должен объявить номера задач, которые он умеет решать (каждый пункт считается отдельно, пункт со звездочкой — за два). Сдача листка состоит в рассказе решений некоторых задач из этого списка на выбор преподавателя — листок считается сданным, если все решения рассказаны верно. Повторная попытка сдачи листка возможна, но не ранее, чем на следующий день. Оценка за листок вычисляется по числу X объявленных задач по формуле $X - 3 - 2N$, где N – номер недели, когда происходит сдача листка.

ВАЖНО: Необходимо заранее договариваться с вашим преподавателем о времени сдачи листка!

Задача 1. Вычислите суммы

а) $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$; б) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$

в) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$, г) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\cdot n}$

Задача 2. Покажите, что $\underbrace{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots + \sqrt{1}}}}_{n} < 2$.

Задача 3. Число $x + \dfrac{1}{x}$ целое. Покажите, что $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ тоже целое при любом натуральном n.

Задача 4. Числа Фибоначчи F_n определяются условиями $F_1 = F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Докажите, что что квадрат F_n^2 n-го числа Фибоначчи отличается на 1 от произведения $F_{n-1}F_{n+1}$ двух соседних.

Задача 5. a) Сколько диагоналей в выпуклом n - угольнике?

b) Сколько треугольников с вершинами в данных n точках общего положения?

Задача 6. Сколько разных слов (не обязательно осмысленных) можно получить, переставляя буквы в словах:

а) ананас; б) $\underbrace{\text{аа}\ldots\text{а}}_{k}\underbrace{\text{бб}\ldots\text{б}}_{m}$?

Задача 7. Имеется пять коробок, раскрашенных в различные цвета, 10 одинаковых карандашей и 10 попарно различных ручек. Сколькими способами можно разложить

a) ручки по коробкам ?

b) карандаши по коробкам ?

Задача 8. a) Дано n лампочек, каждая может быть либо включена, либо выключена. Сколько всего есть вариантов освещения? Каких вариантов больше: когда горит четное число ламп, или когда горит нечетное их число?

b) Натуральное число называется *свободным от квадратов*, если он не делится на квадрат никакого простого числа. Сколько всего делителей у свободного от квадратов числа?

Задача 9. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8×8 8 ладей, чтобы они не били друг друга?

Задача 10. a) Сколькими способами можно посадить n человек в ряд, чтобы Иванов и Петров не сидели рядом?

b) Сколько существует таких способов рассадки за круглым столом?

Задача 11. На какое наибольшее число частей могут разделить плоскость

a) n прямых;
b) * n окружностей?

Задача 12. * Единичным n-мерным кубом назовем множество точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, таких, что $0 \leq x_i \leq 1$. Его вершины - это точки, все координаты которых равны либо 0, либо 1. Любое ребро куба, параллельное k-ой координатной оси, соединяет две вершины, отличающиеся только в k-ой позиции. Сколько существует кратчайших путей по ребрам из вершины $(0, 0, 0, \ldots, 0)$ (все координаты нули) в вершину $(1, 1, 1, \ldots, 1)$?