Гладкие многообразия, Листок 1

Крайний срок сдачи 25.09.2019

(Крайний срок не распространяется на задачи со звёздочкой.)

1. Нарисуйте на плоскости множество точек, которое (а)* может быть образом непрерывной кривой, но не может быть образом гладкой кривой (Ответ необходимо обосновать!); (б) может быть образом гладкой кривой, но не может быть образом регулярной кривой.

2. Докажите, что кривизна плоской кривой $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, где t — произвольный параметр, может быть найдена по формуле

$$k = \frac{|\ddot{x}\dot{y} - \ddot{y}\dot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}.$$

(Указание: воспользуйтесь формулами Френе.)

3. Найдите кривизну кривой, заданной уравнением $F(x, y) = 0$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

4. Докажите, что (а) если кривизна кривой тождественно равна нулю, то это прямая, а если кручение кривой тождественно равно нулю, то кривая лежит в плоскости. (б) Опишите кривые с постоянными кривизной и кручением. (в) Докажите, что кривая постоянной кривизны, лежащая на сфере, является окружностью.

5. Найдите (а) репер Френе; (б) кривизну k и (в) кручение $\varkappa$ конической винтовой линии:

$$x = t\cos\omega t, \qquad y = t\sin\omega t, \qquad z = t.$$

6. Рассмотрим натурально параметризованную кривую $\gamma(s)$ на плоскости и функцию $S_q(s) = \|\gamma(s) - q\|^2$ квадрата расстояния до фиксированной точки $q \in \mathbb{R}^2$. Докажите, что

(а) точка q принадлежит нормали к кривой тогда и только тогда, когда $S_q'(s) = 0$;

(б) q является центром кривизны (лежит на эволюте) тогда и только тогда, когда $S_q'(s) = S_q''(s) = 0$ (т.е. окружность кривизны имеет более высокий порядок касания с кривой);

(в) $\gamma(s)$ к тому же является точкой экстремума кривизны (особой точкой эволюты) тогда и только тогда, когда $S_q'(s) = S_q''(s) = S_q'''(s) = 0$ (т.е. в точках экстремума кривизны окружность кривизны имеет еще более высокий порядок касания с кривой).

7. ** Докажите, что выпуклая замкнутая гладкая плоская кривая имеет не менее 4 точек экстремума кривизны.