Листок 2

Листок можно сдать только целиком за один раз, при этом перед сдачей листка студент должен объявить номера задач, которые он умеет решать (каждый пункт считается отдельно, пункт со звездочкой — за два, с двумя - за три). Перед сдачей листка происходит обсуждение вашего письменного домашнего задания, которое должно быть зачтено для продолжения беседы. Сдача листка состоит в рассказе решений некоторых задач из этого списка на выбор преподавателя — листок считается сданным, если все решения рассказаны верно. Повторная попытка сдачи листка возможна, но не ранее, чем на следующий день. Оценка за листок вычисляется по числу X объявленных задач по формуле $X - 1 - 2N + k - 3d$. Здесь N – номер недели, когда происходит сдача листка, k - количество рассказанных у доски на семинаре задач, $d = 0$, если домашнее задание зачтено в течение 10 дней после его выдачи и $d = 1$ в противном случае.

Задача 1. Выведите формулу полинома

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1, k_2 \ldots k_m \geq 0 \\ k_1 + \ldots + k_m = n}} \frac{n!}{k_1! \cdots k_m!} x_1^{k_1} \cdots x_m^{k_m}$$

непосредственно и индукцией по m

Задача 2. Выпишите тождества на биномиальные коэффициенты, эквивалентные равенствам $(a+b)^n = (a+b)^{n-1}(a+b)$, $\quad (a+b)^{n+m} = (a+b)^n(a+b)^m$

Задача 3. Сколькими способами можно разбить $2n$ человек на пары?; $3n$ человек на тройки?

Задача 4.

a) Сколько имеется различных одночленов степени d от n переменных?

b) Сколько имеется различных одночленов степени d от n переменных, в которых каждая переменная входит в ненулевой степени?

Задача 5. Сколькими способами можно представить число $n \in \mathbb{N}$ в виде суммы (произвольного числа) натуральных слагаемых? Представления, отличающиеся порядком слагаемых, считаются различными.

Задача 6. Имеется n различных круглых бусинок. Сколькими способами можно составить из них ожерелье, насчитывающее k бусинок?

Задача 7. * Сколько k-мерных граней у n-мерного куба? (См задачу 12 листка 0)

Задача 8. Трехмерный параллелепипед размером $n \times m \times p$ $(m, n, p \in \mathbb{N})$ составлен из mnp элементарных кубиков $1 \times 1 \times 1$. Каково количество кратчайших путей из вершины параллелепипеда в противоположную, проходящих по ребрам элементарных кубиков?

Задача 9. Предложите чисто комбинаторные доказательства тождеств:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$

b) $\displaystyle\sum_{r=0}^{n} \binom{n-r-1}{k-r} = \binom{n}{k}$

Задача 10. Пусть M – множество из m различных натуральных чисел, N – множество из n различных натуральных чисел. Найдите, сколько имеется различных отображений $M \to N$:

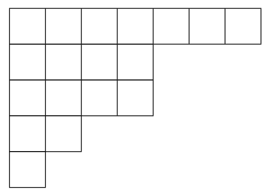
a) произвольных; иньективных; взаимно однозначных; строго возрастающих (т.е. таких, что $\forall x, y \in M\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$);
b) неубывающих
c) * сюръективных

Задача 11. Сформулируйте и докажите формулу включений–исключений.

Задача 12. Сколько существует целых чисел от 1 до 1 000 000, которые не являются ни полным квадратом, ни полным кубом, ни четвертой степенью целого числа?

Задача 13. * Пусть $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ – разложение числа n в произведение простых попарно различных чисел. Найдите сумму делителей числа n.

Задача 14. Фигурка типа



(состоящая из выравненных по левому краю клетчатых горизонтальных полосок с клетками одинакового размера, длина которых невозрастает сверху вниз) называется *диаграммой Юнга*. Общее число клеток в диаграмме называется ее *весом*. Выясните, сколько существует диаграмм Юнга

a) веса 7, имеющих не более 3 строк;
b) произвольного веса, но имеющих не более p строк и не более q столбцов.