

Задачи по группам и алгебрам Ли листок 1, 19.09.2019

Для получения оценки 10 по данному листку необходимо сдать 80% пунктов задач (остальные оценки вычисляются пропорционально). Дедлайн 11 октября. Задачи, сданные после дедлайна, стоят на 25% меньше. Итоговая оценка вычисляется по формуле 0.6 средней оценки за листки и контрольную + 0.4 оценки за экзаменационную работу.

1. Пусть M и N — гладкие многообразия, $M' \subset M$ и $N' \subset N$ — их (замкнутые) подмногообразия и $f : M \rightarrow N$ — гладкое отображение, такое, что $f(M') \subseteq N'$. Докажите, что $f|_{M'}$ (сужение отображения на M') является гладким отображением $M' \rightarrow N'$.
2. Докажите, что для гладких многообразий свойства быть связным пространством и линейно связным пространством совпадают.
3. Напишите в явном виде экспоненциальное отображение для группы Ли матриц вида $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, где $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$.
4. Найдите образ экспоненциального отображения для следующих групп Ли: а) $GL(N, \mathbb{C})$; б) $SO(N)$; в) группы вещественных верхнетреугольных матриц размера $N \times N$.
5. Докажите, что группа $SU(2)$ как многообразие диффеоморфна сфере S^3 .
6. Опишите все (не обязательно связные) подгруппы Ли в группе Ли а) \mathbb{R} ; б) S^1 ; в) $S^1 \times S^1$.
7. Группа Ли G действует на многообразии M . Докажите, что стабилизатор G_m всякой точки $m \in M$ является подгруппой Ли в G .
8. Для следующих действий групп Ли на многообразиях докажите, что эти действия гладки, и опишите явно орбиты и стабилизаторы точек: а) тавтологическое действие группы $GL(N, \mathbb{R})$ на пространстве \mathbb{R}^N ; б) тавтологическое действие группы $SO(N)$ на пространстве \mathbb{R}^N ; в) действие группы $GL(N, \mathbb{R})$ на пространстве $N \times N$ -матриц $Mat_n(\mathbb{R})$ слева; г) действие группы $GL(N, \mathbb{R}) \times GL(N, \mathbb{R})$ на пространстве $N \times N$ -матриц $Mat(N, \mathbb{R})$ слева и справа; д) действие группы $GL(N, \mathbb{R})$ на пространстве симметрических билинейных форм на пространстве \mathbb{R}^N заменами базиса; е) действие группы $GL(N, \mathbb{R})$ на пространстве кососимметрических билинейных форм на пространстве \mathbb{R}^N заменами базиса; ж) действие группы $GL(N, \mathbb{C})$ на пространстве эрмитовых билинейных форм на пространстве \mathbb{C}^N заменами базиса.
9. Докажите, что следующие группы являются группами Ли, найдите их размерности, количество компонент связности и выясните, компактны они или нет: а) $SL(N, \mathbb{R})$, б) $SL(N, \mathbb{C})$, в) $PGL(N, \mathbb{R})$, г) $PGL(N, \mathbb{C})$, д) $O(N)$, е) $U(N)$, ж) $SU(N)$.
10. а) Докажите, что группа $SO(3)$ топологически проста, т.е. в ней нет собственных замкнутых нормальных подгрупп. б) Найдите все ее связные подгруппы Ли.
11. а) Найдите все нормальные подгруппы Ли в группе сохраняющих ориентацию движений вещественной плоскости. б) Найдите все подгруппы Ли в этой группе.