Классическая теория поля 2019

Листок 1. Принцип наименьшего действия и законы сохранения

Срок сдачи: до 8 октября 2019

---

1. Регулятор Уатта (*Джеймс Уатт, 1788*) состоит из четырех одинаковых стержней ОА, ОВ, АС и ВС длины ℓ, двух грузов А и В, имеющих массу m каждый, и муфты С массы M, которая может скользить вдоль вертикальной оси Oz, проходящей через неподвижную точку О (см. рис.1). Вся система может вращаться вокруг оси Oz. Масса стержней и трение пренебрежимо малы. На грузы действует однородная сила тяжести, направленная против оси Oz.

а) Выбрав подходящий набор обобщенных координат, постройте действие этой механической системы.

б) Определите выполняющиеся в ней законы сохранения.

2. Одномерная релятивистская частица. Материальная точка движется вдоль оси Ox декартовой прямоугольной системы координат. Ее динамика определяется действием

$$S[x(t)] = -\alpha c \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{c^2 - \dot{x}^2}\, dt, \qquad \dot{x} = \frac{dx}{dt},$$

где α и c — положительные вещественные константы. Функционал S определен на траекториях, для которых $|\,\dot{x}(t)| \le c$.

а) Пусть $x(t)$ траектория "медленного" движения частицы, то есть, в любой момент времени ее скорость много меньше c: $|\,\dot{x}(t)| \ll c$. Разложите действие S в ряд по малому параметру $\dot{x}/c$ (достаточно привести 3 первых слагаемых) и предложите физическую интерпретацию константы α.

б) Докажите, что множество однопараметрических преобразований с вещественным параметром θ

$$\begin{cases} \tilde{t} = t\,\mathrm{ch}\theta - (x/c)\,\mathrm{sh}\theta \\ \tilde{x} = x\,\mathrm{ch}\theta - c\,\tilde{t}\,\mathrm{sh}\theta \end{cases} \qquad \text{где} \quad \mathrm{ch}\theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}, \quad \mathrm{sh}\theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2},$$

образует группу симметрий рассматриваемой механической системы и выпишите выражение для Нётеровского интеграла движения. Какое ограничение налагается на скорости $d\tilde{x}/d\tilde{t}$?

3. Материальная точка массы m движется в однородном силовом поле по прямой: $L(x, \dot{x}) = \frac{m\dot{x}^2}{2} + gx$. Определите закон сохранения, отвечающий преобразованию симметрии $\tilde{t} = t$, $\tilde{x} = x + \epsilon$.

4. Задача о брахистохроне (*Иоганн Бернулли, 1696*). Материальная точка, начальная скорость которой равна 0, движется без трения в вертикальной плоскости под действием силы тяжести по некоторой кривой, соединяющей две заданные точки, начальную и конечную. Задача состоит в том, чтобы найти такую кривую, называемую брахистохроной, движение по которой из начальной точки в конечную занимает наименьшее время. Пользуясь вариационным принципом, составьте дифференциальное уравнение брахистохроны. Определите форму брахистохроны, используя аналог закона сохранения энергии при интегрировании дифференциального уравнения.

5. Найдите дифференциальные уравнения, характеризующие экстремали функционала

$$S[q^i(t)] \;=\; \int_{t_1}^{t_2} L(q^i, \dot{q}^i, \ddot{q}^i)\, dt$$

на траекториях с фиксированными координатами и скоростями в начальный и конечный моменты времени: $q^i(t_1) = q_1^i$, $\dot{q}^i(t_1) = \dot{q}_1^i$, $q^i(t_2) = q_2^i$, $\dot{q}^i(t_2) = \dot{q}_2^i$.

Что изменится, если искать решение этой вариационной задачи на множестве траекторий с фиксированными координатами, но произвольными скоростями в начальный и конечный моменты времени?

6. Однородная балка прямоугольного сечения с постоянной толщиной и шириной прогибается под действием силы тяжести. Потенциальная энергия упругой деформации балки в главном приближении имеет вид

$$U_{\text{упр}} = \kappa \int_0^L dx (y''(x))^2 \,,$$

где L – длина балки, κ – коэффициент, зависящий от размеров сечения и материала балки, а функция $y(x)$ задает отклонение средней линии балки вниз от горизонтали (см. рис.2). В состоянии равновесия потенциальная энергия балки минимальна. Определите форму балки для трех нижеперечисленных граничных условий.

а) Мостик: концы балки свободно лежат на двух опорах, опоры расположены на одной высоте.

б) Перекрытие (потолок): балка обоими концами горизонтально вмонтирована в стену.

в) Балкон: балка одним концом горизонтально вмонтирована в стену, а другой ее конец не закреплен.

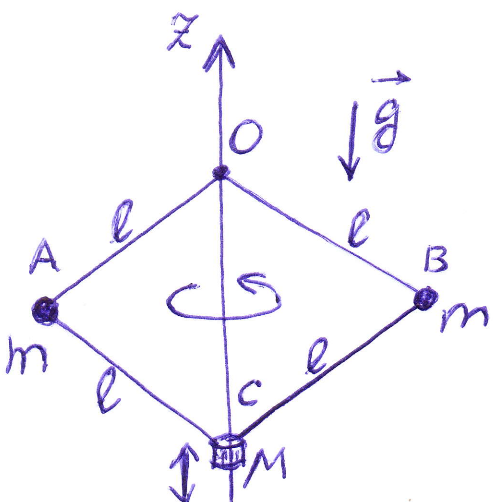

рис. 1.

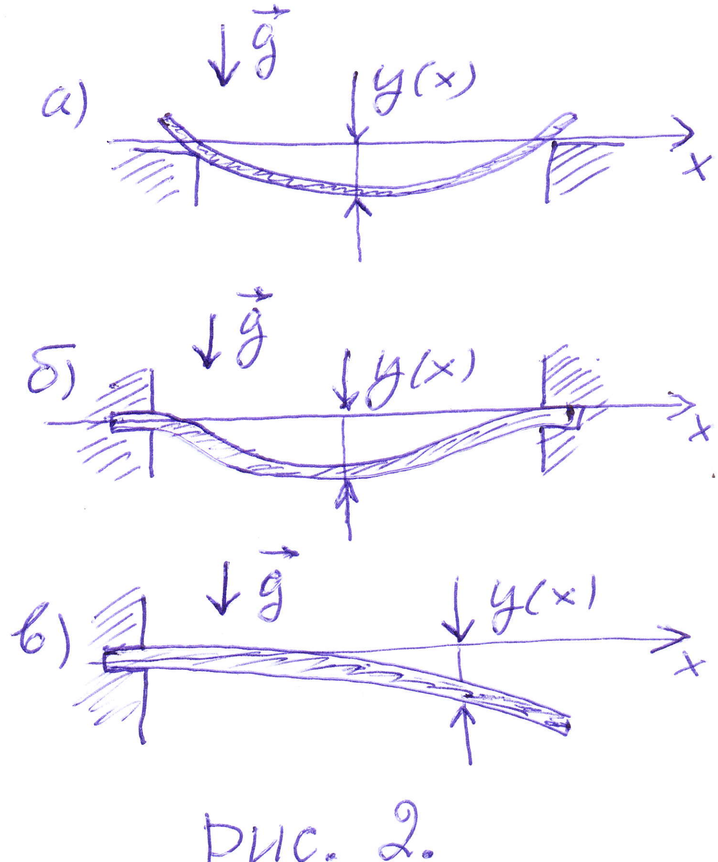

рис. 2.