Листок 1

Вокруг теорем существования и единственности

срок сдачи 18 октября

Задача 1. (1+1) Пусть $f \in C(0, +\infty)$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+0} f(x)$. Докажите, что:
а) при $a > 0$ лишь одно решение уравнения $xy' + ay = f(x)$ ограничено в полуокрестности нуля, причём это решение имеет предел (какой?) при $x \to +0$;
б) при $a < 0$ все решения имеют предел (какой?) при $x \to +0$.

Задача 2. (1+1+1+1) а) Найдите периодическое решение уравнения $\dot{x} = 2x\cos^2 t - \sin t$.
б) Пусть C^1-функция $f(x,t)$ является 1-периодичной по t ($x \in \mathbb{R}$). Пусть $x(t)$ — непостоянное решение уравнения $\dot{x} = f(x,t)$. Докажите, что если $x(t)$ периодично с минимальным периодом τ, то $\tau \in \mathbb{Q}$.
в) Докажите, что $\tau = 1/m$ при некотором $m \in \mathbb{N}$.
г) Приведите пример уравнения $\dot{x} = f(x,t)$, где x двумерно, для которого утверждение пункта б) неверно.

Задача 3. (2) Пусть $b, h \in C^1(\mathbb{R})$ и $b(x) < h(x)$ при всех x. Пусть $x, y\colon (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ удовлетворяют уравнениям $\dot{x} = b(x)$, $\dot{y} = h(y)$, причём $x(t_0) = y(t_0)$ для некоторого $t_0 \in (\alpha,\beta)$. Докажите, что $x(t) < y(t)$ при $t \in (t_0, \beta)$.

Задача 4. (2) Для уравнений $\dot{x} = f(x,t)$, где $f \in C(\mathbb{R}^2)$, справедлива теорема существования (но не единственности!) решений — теорема Пеано. Рассмотрим множество C_τ значений $x(\tau)$ для всех решений x задачи Коши $\dot{x} = f(x,t)$, $x(t_0) = x_0$. Докажите, что множество C_τ связно.
(Указание: теорема о продолжении решения до границы компакта верна и в этом контексте.)

Задача 5. (1+1) По плоскости движутся пять букашек, $x_i(t)$ — их траектории. При $t = 0$ они сидят в вершинах правильного пятиугольника $A_0A_1A_2A_3A_4$, стороны которого имеют длину 1, а далее i-я букашка движется с единичной скоростью по биссектрисе угла $x_{i+1}x_ix_{i+2}$ (все номера берутся по модулю 5).
а) Строго докажите, что букашки всё время будут находиться в вершинах правильного пятиугольника.
б) На какой максимальный интервал $[0, T)$ продолжается решение $(x_i(t))_{i=0}^4$ вышеописанной задачи Коши? Какова длина траектории каждой из букашек?

Задача 6. (3+3) Известная модель радиолампового генератора колебаний задаётся системой ($\mu > 0$ — параметр)

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = -x - \mu(x^2 - 1)y.$$

а) Докажите, что все решения этой системы продолжаются вперёд на бесконечный интервал по времени.
(Указание: рассмотрите сначала $d(x^2 + y^2)/dt$.)
б) Докажите, что некоторые её решения продолжаются назад по времени лишь на конечный интервал.
(Указание: изобразите на плоскости (x, y) области, где $(\dot{x}, \dot{y})$ лежит в определённом квадранте. Где следует тогда искать требуемые решения?)