

Домашнее задание № 1

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Дата сдачи задания: 15.10.2019

Рекомендация. В задачнике А.Ф. Филиппова “Сборник задач по дифференциальным уравнениям” имеется краткое изложение основных методов интегрирования предложенных ниже задач. Теория и полезные приемы представлены в начале каждого тематического раздела задачника.

1. Вертикальный цилиндрический сосуд заполнен водой до высоты H . Площадь горизонтального сечения сосуда S . В некоторый момент на дне сосуда открывается небольшое отверстие, площадь которого меняется со временем по закону

$$\sigma(t) = \sigma e^{-t/T_0},$$

где t — время, прошедшее с момента открытия отверстия, σ и T_0 — заданные параметры. Найдите все значения параметра T_0 , при которых вода успеет вытечь из сосуда до полного закрытия отверстия. Считайте, что зависимость скорости вытекания воды из малого отверстия от уровня воды в сосуде h описывается законом Торричелли $v(h) = \sqrt{2gh}$.

2. Гладкая кривая расположена в первом квадранте ($x \geq 0, y \geq 0$) вещественной плоскости \mathbb{R}^2 и обладает следующим свойством. Проведем из произвольной точки M кривой две прямые, перпендикулярные осям координат, и рассмотрим прямоугольник с вершинами в начале координат, в выбранной точке M , и в точках пересечения упомянутых прямых с осями координат. Тогда кривая делит этот прямоугольник на две части, площади которых относятся как $1 : \alpha$, где α — заданное положительное число. Составьте дифференциальное уравнение этой кривой и решите его для случая, когда кривая содержит точку $M_0(1, 2)$.

Найдите общее решение дифференциальных уравнений

3. $y^2 = y \frac{dy}{dx} e^x + 1$

4. $\frac{dy}{dx} \operatorname{ctg} x + y = 1$

5. $\frac{dy}{dx} - xy^2 = 2xy$

6. $\frac{dy}{dx} = \sin 2(x + y) - 1$

7. $\frac{dy}{dx} = \frac{y+x}{y-x}$

8. $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2} dx$

$$9. \quad x \frac{dy}{dx} - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$$

$$10. \quad (1 + x^2) \frac{dy}{dx} + xy = 1$$

$$11. \quad \frac{ds}{dt} + s \cos t = \frac{1}{2} \sin 2t$$

$$12. \quad \left(x \frac{dy}{dx} - 1 \right) \ln x = 2y$$

$$13. \quad xy(1 + xy^2) \frac{dy}{dx} = 1$$

$$14. \quad x \frac{dy}{dx} - y = x^2 \sqrt{y}$$

Найдите значения вещественного параметра α , при котором уравнение становится уравнением в полных дифференциалах и решите его для этих значений α

$$15. \quad (x^2 + y^\alpha) dx + (\alpha x - 2y) dy = 0$$

$$16. \quad \left(\cos^2 x - (x + y) \sin \frac{x}{\alpha} \right) dx + 2(\alpha - 1) \sin^2 x dy = 0$$

$$17. \quad \left(\frac{1}{x} - \frac{y^\alpha}{(x - y)^2} \right) dx - \left(\frac{1}{y} - \frac{x^\alpha}{(x - y)^2} \right) dy = 0$$

Найдите интегрирующий множитель и решите уравнения в дифференциалах

$$18. \quad \left(1 + \frac{3y^2}{x^2} \right) dx = \frac{2y}{x} dy$$

$$19. \quad \left(2x + \frac{y}{x^2} \right) dx + \left(x^2 - \frac{y+1}{x} \right) dy = 0$$

$$20. \quad \ln y dx - \frac{x}{y} dy = 0$$