Листок 5

Листок можно сдать только целиком за один раз, при этом перед сдачей листка студент должен объявить номера задач, которые он умеет решать (каждый пункт считается отдельно, пункт со звездочкой — за два, с двумя - за три). Сдача листка состоит в рассказе решений некоторых задач из этого списка на выбор преподавателя — листок считается сданным, если все решения рассказаны верно. Повторная попытка сдачи листка возможна, но не ранее, чем на следующий день. Оценка за листок вычисляется по числу X объявленных задач по формуле $X + 8 - 2N + 2k$. Здесь N – номер недели, когда происходит сдача листка, k - количество рассказанных у доски на сеинаре задач.

Задача 1. Изоморфны ли следующие упорядоченные множества:

a) $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Q}$?
b) $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$?
c) $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$?

Задача 2. Пусть X - вполне упорядоченное множество. Тогда

a) X содержит минимальный элемент
b) для всякого $x \in X$, кроме максимального, есть непосредственно следующий за ним (но не обязательно есть предыдущий)
c) любое ограниченое сверху множество элементов имеет точную верхнюю грань

Задача 3. Пусть M и N - два линейно упорядоченных множества. Тогда на их произведении $M \times N$ можно определить два естественных порядка: "покоординатный": $(x, y) \leq (x', y')$, если $x \leq x'$ и $y \leq y'$ и "лексикографический": $(x, y) \leq (x', y')$ если $x < x'$ (т.е., $x \leq x'$ и $x \neq x'$) либо $x = x'$ и $y \leq y'$.

a) Убедитесь, что это порядки, один из которых линеен, а другой нет, один согласован с проекциями на сомножители (т.е., проекции являются гомоморфизмами упорядоченных множеств), а другой нет.
b) Для порядка на плоскости $\mathbb{R}^2$, построенного лексикографически из стандартных порядков на $\mathbb{R}$, нарисуйте множество всех таких точек $p \in \mathbb{R}^2$, что $(1, 2) \leq p \leq (2, 1)$.

Задача 4. Пусть M - конечное множество с m элементами. Установите изоморфизм между следующими упорядоченныйми множествами: множеством $P(M)$ всех подмножеств множества M и последовательностями нулей и единиц длины m с покомпонентным порядком.

Задача 5. Рассмотрим финитные последовательности натуральных чисел, т.е., последовательности, все члены которых, за исключением конечного числа, равны нулю. Порядок - покомпонентное сравнение. Докажите, что это частично упорядоченное множество изоморфно множеству натуральных чисел с отношением делимости.

Задача 6. a) Рассмотрим множество 2^M всех подмножеств конечного множества M, $|M| = m$. Порядок - включение подмножеств. Сколько автоморфизмов у этого множества?
b) Покажите, что у множества $\mathbb{N}$, упорядоченного по отношению делимости, континуум автоморфизмов

Задача 7. Два различных элемента x и y линейно упорядоченного множества X называются соседними, если не существует такого $z \in X$ что либо $x < z < y$, либо $y < z < x$. Линейно упорядоченное множество X называется плотным, если в нем нет соседних элементов. Докажите, что всякое плотное линейно счетное упорядоченное множество без максимального и минимального элементов изоморфно $\mathbb{Q}$.

Задача 8. Сформулируйте лемму Цорна, аксиому выбора и теорему Цермело, определив при этом все необходимые для формулировок понятия.

Задача 9. Выведите из леммы Цорна следующие утверждения:

a) * всякий частичный порядок может быть продолжен до линейного
b) * у любой сюръекции есть левый обратный;
c) * в любом линейном пространстве существует максимальное подпространство, не содержащее данный вектор;
d) * на любом линейном пространстве существует линейная функция, равная нулю на одном наперед заданном векторе и единице на втором;
e) * любые два множества сравнимы по мощности.

Задача 10. Выведите из леммы Цорна

a) * аксиому выбора
b) * теорему Цермело