

Задачи по группам и алгебрам Ли листок 2, 07.10.2019

Для получения оценки 10 по данному листку необходимо сдать 80% пунктов задач (остальные оценки высчитываются пропорционально). Дедлайн 25 октября. Задачи, сданные после дедлайна, стоят на 25% меньше. Итоговая оценка вычисляется по формуле 0.6 средней оценки за листки и контрольную + 0.4 оценки за экзаменационную работу.

1. Найдите касательные алгебры следующих групп Ли **а)** $SL(N, \mathbb{R})$, **б)** $SL(N, \mathbb{C})$, **в)** $PGL(N, \mathbb{R})$, **г)** $PGL(N, \mathbb{C})$, **д)** $O(N)$, **е)** $U(N)$, **ж)** $SU(N)$.
2. **а)** Выпишите операцию коммутатора в касательной алгебре группы $SO(3)$ в каком-нибудь базисе. **б)** Тот же вопрос для группы строго верхнетреугольных 3×3 -матриц (группы Гейзенберга). **в)** Тот же вопрос для группы $SU(2)$.
3. **а)** Дайте определения подалгебры Ли, гомоморфизма алгебр Ли, изоморфизма алгебр Ли, идеала в алгебре Ли, факторалгебры Ли. Докажите теорему о гомоморфизме: образ алгебры Ли \mathfrak{g} при гомоморфизме $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ является подалгеброй Ли в \mathfrak{h} , изоморфной фактору алгебры Ли \mathfrak{g} по ядру гомоморфизма. **б)** Опишите с точностью до изоморфизма все алгебры Ли над полем \mathbb{R} размерности не выше 2. **в)** Приведите хотя бы три примера неизоморфных друг другу алгебр Ли над \mathbb{R} размерности 3 с нетривиальной скобкой.
4. **а)** Докажите, что для группы Ли строго верхнетреугольных матриц (т.е. с единицами на диагонали) экспоненциальное отображение взаимно однозначно, и ряд для логарифма сходится везде. **б)** Покажите, что для этой группы операция умножения в канонических координатах задается полиномиальными формулами.
5. Докажите, что диффеоморфизм $M \rightarrow N$ многообразий порождает морфизм $\text{Vect}(M) \rightarrow \text{Vect}(N)$ алгебр Ли векторных полей.
6. Предположим, что группа Ли G гладко действует *справа* на многообразии M (это означает, что задано гладкое отображение $(m, g) \mapsto m \cdot g$ из $M \times G$ в M , такое, что $(m \cdot g_1) \cdot g_2 = m \cdot (g_1 g_2)$). **а)** Покажите, что это действие порождает морфизм алгебры Ли группы G в алгебру Ли векторных полей на M . **б)** Рассмотрим конкретный пример, в котором группа $G = GL(N, \mathbb{R})$ действует справа на пространстве \mathbb{R}^N , интерпретируемом как пространство векторов-строк. Найдите векторные поля на \mathbb{R}^N , отвечающие матричным единицам E_{ij} .
7. Задана группа Ли G и ее автоморфизм $\varphi : G \rightarrow G$. Обозначим через $G^\varphi \subset G$ подмножество элементов, неподвижных относительно φ . Докажите следующие утверждения: **а)** Дифференциал $d\varphi$ является автоморфизмом алгебры Ли $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$. **б)** G^φ является подгруппой Ли в G . **в)** Ее алгебра Ли состоит в точности из тех элементов $X \in \mathfrak{g}$, которые неподвижны относительно $d\varphi$.
8. Вещественная симплектическая группа $Sp(2N, \mathbb{R})$ определяется как подгруппа элементов в $GL(2N, \mathbb{R})$, сохраняющих невырожденную кососимметрическую форму. Докажите, что $Sp(2N, \mathbb{R})$ можно реализовать как подгруппу вида G^φ , где $G = GL(2N, \mathbb{R})$. Опишите в явном виде соответствующий автоморфизм φ .
9. Пусть A — конечномерная ассоциативная алгебра с единицей над \mathbb{R} . Докажите следующие утверждения: **а)** A можно реализовать как подалгебру в алгебре матриц. **б)** Множество $A^\times \subset A$ обратимых элементов открыто в A . **в)** A^\times является группой Ли. **г)** Ее алгебру Ли можно отождествить с пространством A , в котором скобка задается коммутатором.
10. Пусть A — конечномерная алгебра над \mathbb{R} (не обязательно ассоциативная). Линейное отображение $D : A \rightarrow A$ называется *дифференцированием* алгебры A , если выполняется правило Лейбница $D(ab) = D(a) \cdot b + a \cdot D(b)$. Докажите, что **а)** группа $\text{Aut}(A)$ автоморфизмов алгебры A является подгруппой Ли в $GL(A)$, **б)** множество $\text{Der}(A)$ всех дифференцирований является подалгеброй Ли в $\text{End}(A)$, и **в)** $\text{Der}(A)$ совпадает с алгеброй Ли группы $\text{Aut}(A)$.