Вопросы к коллоквиуму за 1 модуль 2019/20 уч. г. по курсу «Дифференциальные уравнения»

Билет коллоквиума будет состоять из двух вопросов из списка. На подготовку даётся 45 минут, но уже через 30 минут вы должны быть готовы ответить минимум на один вопрос билета.

1. Обыкновенное дифференциальное уравнение и его решение (определения). Сведение дифференциального уравнения (системы) высокого порядка к системе уравнений первого порядка. Автономные и неавтономные ДУ. Сведение неавтономного ДУ к автономному (с повышением на единицу размерности системы).

2. Задача Коши для ОДУ. Эквивалентное ей интегральное уравнение.

3. Теорема локального существования, единственности и непрерывной зависимости от параметров решения задачи Коши (формулировка). Принцип сжимающих отображений с параметром.

4. Теорема локального существования, единственности и непрерывной зависимости от параметров решения задачи Коши (формулировка). Определение пространства и отображения, к которым предполагается применять принцип сжимающих отображений. Нахождение условий на параметры конструкции, при котором это отображение переводит пространство в себя.

5. Теорема локального существования, единственности и непрерывной зависимости от параметров решения задачи Коши (формулировка). Определение пространства и отображения, к которым предполагается применять принцип сжимающих отображений. Нахождение условий на параметры конструкции, при котором это отображение является сжимающим.

6. Продолжение решений ОДУ. Глобальная единственность решений ОДУ. Глобальная непрерывная зависимость решений ДУ от параметров.

7. Оператор Коши ДУ и его свойства. Преобразования потока автономного ДУ и их свойства.

8. Теорема о продолжении решения до границы компакта.

9. Касательное пространство к $\mathbb{R}^n$ в точке[1]: определения через классы эквивалентности кривых и дифференцирования. Базис $(\partial/\partial x^i)$ в $T_p\mathbb{R}^n$, порождаемый локальной системой координат (картой) (x^i).

10. Векторное поле, его непрерывность и гладкость. Траектория векторного поля. Автономные ДУ — это векторные поля.

11. Кокасательное пространство (пространство 1-форм). Дифференциал функции как элемент $T_p^*\mathbb{R}^n$. Базис (dx^i) в кокасательном пространстве, определяемый локальной системой координат (x^i). Двойственность базисов $(\partial/\partial x^i)$ и (dx^i).

12. Производная df/dt функции $f(x,t)$ в силу системы $\dot{x} = f(x,t)$. Преобразование системы ДУ (и координат векторного поля) при замене координат $y = y(x)$.

13. Уравнение $dy/dx = f(x,y)/g(x,y)$. Расширенное понимание его решения (в окрестности точек, где $f \neq 0$, $g = 0$). Связь между решениями этого уравнения и системы $\dot{y} = f(x,y)$, $\dot{x} = g(x,y)$. Уравнения с разделяющимися переменными $dy/dx = f(x)/g(y)$ и описание всех их решений.

14. Пфаффовы уравнения $a(x,y)dx + b(x,y)dy = 0$, связь их решений с решениями уравнения $dy/dx = f(x,y)/g(x,y)$. Решение пфаффова уравнения в случае, когда $a\,dx + b\,dy = df$. Интегрирующий множитель: решение пфаффова уравнения в случае $a\,dx + b\,dy = g\,df$.

[1] Здесь и далее студент может по своему выбору рассказывать об аналогичных конструкциях для многообразий вместо $\mathbb{R}^n$

15. Линейные системы ДУ. Продолжимость решений системы $\dot{x} = A(t)x$ на весь интервал определения $A(t)$.

16. Линейные системы ДУ первого порядка. Пространство решений. Линейная независимость решений в целом и в одной точке. Фундаментальная система решений. Фундаментальная матрица решений и уравнение для неё. Связь между различными ФМР.

17. Определитель Вронского линейной системы. Формула Лиувилля—Остроградского.

18. Линейное ДУ n-го порядка. Сведение к системе. Пространство решений, условие линейной независимости решений. Определитель Вронского и формула Лиувилля—Остроградского для уравнения n-го порядка.

19. Неоднородные линейные системы ДУ. Связь решений неоднородной и однородной системы. Решение неоднородных систем методом вариации постоянных.