

Листок 3

Группы симметрий. Устойчивость

срок сдачи 13 декабря

Задача 1. (1+1) Пусть функция $b(x, y)$ квазиоднородна степени n с весами α и β :

$$b(e^{\alpha s}x, e^{\beta s}y) = e^{ns}b(x, y), \quad s \in \mathbb{R}.$$

а) Докажите, что поле направлений уравнения $y' = b(x, y)$ на области $\{(x, y) : x, y > 0\}$ инвариантно относительно группы преобразований $h^s(x, y) = (e^{\alpha s}x, e^{\beta s}y)$ тогда и только тогда, когда $n = \beta - \alpha$.

б) Пусть $n = \beta - \alpha$. Найдите замену, которая преобразует уравнение $y' = b(x, y)$ в уравнение с разделяющимися переменными. В каких координатах разделяются переменные в уравнении $y' = xy^2 + x^3y^3$?

Задача 2. (1+1) Какие векторные поля на плоскости коммутируют с векторным полем:

а) $\frac{\partial}{\partial x}$, б) $2\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}$?

Задача 3. (2+2) Рассмотрим векторное поле с периодической траекторией (обозначения те же, что в задаче 6 листка 2).

а) Условия устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости для

- (1) периодической траектории векторного поля (окрестность точки заменяется окрестностью траектории) и
- (2) неподвижной точки локального диффеоморфизма (берутся его степени вместо отображений потока)

даются аналогично таковым для особой точки векторного поля. Сформулируйте указанные определения полностью и докажите, что устойчивость (по Ляпунову или асимптотическая) для периодической траектории и для её отображения Пуанкаре эквивалентны друг другу.

б) Рассмотрим случай $n = 2$. Пусть $x(t) = (\xi(t), \eta(t)) = g^t(x_0)$ — периодическая траектория, z — координата на кривой M , причём точке x_0 отвечает $z = z_0$. Докажите, что $dP/dz(z_0) = e^I$, где

$$I = \int_0^T (\operatorname{div} v)(x(t)) dt = \int_0^T \left(\frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} \right) (\xi(t), \eta(t)) dt.$$

Как, если $I \neq 0$, определить устойчивость этой траектории?

Указание. Как вычислить якобиан отображения g^{t_0} в точке x_0 ?

Задача 4. (1+1) Рассмотрим полиномиальное векторное поле на плоскости $\mathbb{R}^2$:

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y),$$

где P и Q — многочлены степени не выше n .

а) Докажите, что соответствующее ему поле направлений непрерывно продолжается на бесконечно удалённую прямую ℓ_∞ на проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ кроме конечного множества E (оцените сверху число точек в E).

б) Докажите, что «обычно» продолженное поле направлений будет касаться прямой ℓ_∞ во всех точках $\ell_\infty \setminus E$. Говоря более строго, такое касание может не иметь места лишь при обращении в нуль некоторых полиномиальных выражений от коэффициентов многочленов P и Q .