Листок 2

Линейные системы. Выпрямление векторных полей

срок сдачи 29 ноября

Задача 1. (1+1) Нарисуйте образ квадрата $[0,1]\times[0,1]$ под действием преобразования фазового потока за время $t=1$ системы:
а) $\begin{cases}\dot x = x-y,\\ \dot y = 2y,\end{cases}$ б) $\begin{cases}\dot x = 2y,\\ \dot y = x+y.\end{cases}$

Задача 2. (1) Найдите объём образа единичного куба под действием преобразования фазового потока за время $t=2$ системы

$$\dot x = \sin y + 3x, \quad \dot y = \cos z - 2y + x, \quad \dot z = \operatorname{arctg} x - 2y + 4z.$$

Задача 3. (1+1) Выпрямите на плоскости векторные поля:
а) $\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}$, б) $(x+y)\dfrac{\partial}{\partial x} + 2\dfrac{\partial}{\partial y}$.

Задача 4. (1+2) Можно ли выпрямить (перевести диффеоморфизмом в $\partial/\partial x$) на всей плоскости векторные поля: а) $x\dfrac{\partial}{\partial x} - y\dfrac{\partial}{\partial y}$, б) $\sin x\dfrac{\partial}{\partial x} + \cos x\dfrac{\partial}{\partial y}$?

Задача 5. (2+2) Рассмотрим следующие векторные поля на прямой:

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad \sin x\frac{\partial}{\partial x}, \quad 2\sin x\frac{\partial}{\partial x}, \quad \sin^2 x\frac{\partial}{\partial x}, \quad \sin 2x\frac{\partial}{\partial x}.$$

Для каждой пары векторных полей из этого списка выясните:
а) можно ли перевести их друг в друга диффеоморфизмом прямой;
б) можно ли сопрячь их потоки гомеоморфизмом прямой (существует ли гомеоморфизм h, для которого $h\circ g_u^t(x) = g_v^t\circ h(x)$ при всех t и x).
Указание. Посмотрите на особые точки этих векторных полей и на поведение решений между ними.

Задача 6. (1+2+2+1) Автономное дифференциальное уравнение $\dot x = v(x)$ имеет периодическое решение: $g^{t_0}(x_0) = x_0$, $t_0 > 0$. Рассмотрим дифференциал $dg^{t_0}|_{x_0}\colon T_{x_0}\mathbb{R}^n \to T_{x_0}\mathbb{R}^n$ отображения потока за период.
а) Докажите, что 1 — собственное значение этого линейного оператора.
б) Пусть M — $(n-1)$-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$, проходящая через точку x_0, причём

$$T_{x_0}M \oplus \langle v(x_0)\rangle = T_{x_0}\mathbb{R}^n$$

(тогда говорят, что M *трансверсальна* к векторному полю v в x_0). Пусть также t_0 — минимальный период x_0 под действием потока этого векторного поля. Докажите, что для всех $y\in M$, достаточно близких к x_0, полутраектория $O^+(y) = \{g^t(y), t>0\}$ пересечёт M, причём если $\tau(y)$ — момент первого пересечения с M, то $\tau(y)$ стремится к t_0 при $y\to x_0$.
в) Рассмотрим отображение $P(y) = g^{\tau(y)}(y)$. Докажите, что в малой окрестности x_0 это локальный диффеоморфизм M в себя (его называют *отображением Пуанкаре* на трансверсали M).
г) Как соотносятся дифференциалы $dP|_{x_0}$ и $dg^{t_0}|_{x_0}$? Как связаны их спектры?
Указание. Полезно выпрямить векторное поле в окрестности x_0. К какому наиболее простому виду можно привести при этом поверхность M?