## Семинар 2.

Рассмотрим 4 различные точки $A$, $B$, $C$ и $D$ на проективной прямой $\mathbb{P}^1$ с координатами $A:\ \mathbf{x}=(x_0:x_1)$, $B:\ \mathbf{y}=(y_0:y_1)$, $C:\ \mathbf{x}+\lambda\mathbf{y}:=(x_0+\lambda y_0:x_1+\lambda y_1)$, $D:\ \mathbf{x}+\mu\mathbf{y}=(x_0+\mu y_0:x_1+\mu y_1)$, $\quad\lambda,\mu\in\mathbf{k}^*$, в некоторой проективной системе координат $(x_0:x_1)$ на $\mathbb{P}^1$. Обозначим

$$(ABCD)=(AB,CD):=\frac{\lambda}{\mu}.$$

Число (точнее, элемент основного поля) $(ABCD)$ называется *двойным отношением четырех точек* $A$, $B$, $C$, $D$ (по-английски: *cross-ratio*) на проективной прямой $\mathbb{P}^1$.

**Задача 1.** *Пользуясь тем, что точки $A$, $B$, $C$ и $D$ различны, проверьте, что это определение корректно: в данной проективной системе координат на $\mathbb{P}^1$, заменяя, если необходимо, проективные координаты $\mathbf{x}$ данной точки на $\alpha\mathbf{x}$ для некоторого $\alpha\in\mathbf{k}^*$, мы всегда можем найти такие координаты $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и числа $\lambda,\mu\in\mathbf{k}^*$, что $A=\mathbf{x}$, $B=\mathbf{y}$, $C=\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y}$, $D=\mathbf{x}+\mu\mathbf{y}$.*

**Задача 2.** *Пусть на $\mathbb{P}^1$ выбрана аффинная система координат, в которой $A=0,\ B=\infty,\ D=1$. Тогда $(ABCD)$ есть аффинная координата точки $C$.*

**Задача 3.** *Пусть три различные точки $A$, $B$ и $C$ на проективной прямой $\mathbb{P}^1$ имеют в произвольной проективной системе координат на $\mathbb{P}^1$ координаты*

$$A=\mathbf{x},\quad B=\mathbf{y},\quad C=\mathbf{x}+\theta\mathbf{y},\quad \theta\in\mathbf{k}^*.$$

*Докажите, что $D\in\mathbb{P}^1$ – четвертая гармоническая для $A$, $B$ и $C$ т. и т. т., к.*

$$D=\mathbf{x}-\theta\mathbf{y}.$$

*Иными словами, $A,B,C,D$ – гармоническая четверка точек т. и т. т., к. $(ABCD)=-1$. Указание к решению*: воспользоваться задачей 9.

**Задача 4.** *Покажите, что двойное отношение $(ABCD)$ не зависит от выбора проективной системы координат на $\mathbb{P}^1$. Другими словами, если в новой системе координат точки $A$ и $B$ имеют координаты $\mathbf{x}'=(x_0':x_1')$ и $\mathbf{y}'=(y_0':y_1')$, а точки $C$ и $D$ – соответственно координаты*

$$C:\quad \mathbf{x}'+\lambda'\mathbf{y}',\quad D:\quad \mathbf{x}'+\mu'\mathbf{y}',$$

*то $\lambda'=\lambda,\ \mu'=\mu$, а значит,*

$$\frac{\lambda'}{\mu'}=\frac{\lambda}{\mu}.$$

**Задача 5.** *Пусть в некоторой проективной системе координат $(x_0:x_1)$ на $\mathbb{P}^1$ точки $A$, $B$, имеют координаты $\mathbf{x}=(x_0:x_1)$ и $\mathbf{y}=(y_0:y_1)$, а точки $C$ и $D$ – координаты*

$$A:\ \mathbf{x}=(x_0:x_1),\quad B:\quad \mathbf{y}=(y_0:y_1),\quad C:\quad \mathbf{z}=(z_0:z_1),\quad D:\quad \mathbf{w}=(w_0:w_1).$$

*Введем обозначение:* $|\mathbf{xy}|:=\begin{vmatrix} x_0 & y_0\\ x_1 & y_1\end{vmatrix}$. *Покажите, что*

$$(ABCD)=\frac{|\mathbf{xz}|}{|\mathbf{xw}|}\bigg/\frac{|\mathbf{yz}|}{|\mathbf{yw}|}=\frac{|\mathbf{xz}|}{|\mathbf{yz}|}\bigg/\frac{|\mathbf{xw}|}{|\mathbf{yw}|}.$$

*Правило для запоминания*: если символически записать $\mathbf{x}=1,\ \mathbf{y}=2,\ \mathbf{z}=3,\ \mathbf{w}=4$, то

$$(ABCD)=\frac{|13|}{|14|}\bigg/\frac{|23|}{|24|}=\frac{|13|}{|23|}\bigg/\frac{|14|}{|24|}.$$

**Задача 6.** *Докажите, что двойное отношение сохраняется при проективных отображениях (преобразованиях) проективной прямой.*

**Задача 7.** *Пусть проективное преобразование $f:\mathbb{P}^1\to\mathbb{P}^1$ имеет только две различные неподвижные точки $A$ и $B$ и является инволюцией, то есть $f\circ f=\mathrm{id}_{\mathbb{P}^1}$. Для произвольной точки $X$, отличной от $A$ и $B$, найдите двойное отношение $(ABXf(X))$.*