Классическая теория поля 2019

Листок 3. Основные понятия и математические приемы в теории поля.

Срок сдачи: до 27 ноября

---

1. Рассмотрим свободное вещественное скалярное поле с лагранжевой плотностью

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\,\phi^2$$

в 4-мерном пространстве Минковского. Разложим решение уравнения Эйлера-Лагранжа этой модели в сумму положительно и отрицательно частотных компонент:

$$\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x), \qquad \phi^\pm(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, a^\pm(\vec{p})\, \frac{e^{\pm ip\cdot x}}{2p^0}\Big|_{p^0=\sqrt{\vec{p}^{\,2}+m^2}},$$

где $p^\mu = (p^0, \vec{p})$ и $p\cdot x := p^\mu x_\mu$. Выразите сохраняющийся 4-вектор энергии-импульса P^μ поля ϕ в терминах амплитуд $a^\pm(\vec{p})$.

Напоминание: $P^\mu = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x T^{0\mu}$, где $T^{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса поля.

2. В двумерном пространстве Минковского с координатами x^0 и x^1 и метрикой $g = \mathrm{diag}(1,-1)$ рассмотрим скалярное поле с лагранжевой плотностью

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{\beta^2}\,(1-\cos(\beta\phi)).$$

а) Найдите частное решение уравнений движения для поля ϕ в виде бегущей вправо волны $\phi(x) = f(x^1 - vx^0)$ такое, что $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - f(-x)) = 2\pi/\beta$.

б) Вычислите полную энергию и импульс найденной в пункте а) полевой конфигурации. Пользуясь релятивистским дисперсионным соотношением (связь энергии и импульса) определите величину “массы” полевого решения.

3. Рассмотрим систему двух свободных комплексных скалярных полей $\phi_1(x)$ и $\phi_2(x)$ с лагранжевой плотностью

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{2} \partial_\mu\overline{\phi_i}\,\partial^\mu\phi_i.$$

Помимо пространственно-временных симметрий (т.е., группы Пуанкаре) эта модель имеет и другие симметрии, называемые *внутренними*. Определите группу внутренних симметрий модели и найдите соответствующие сохраняющиеся токи.

Математическое дополнение: задачи про обобщенные функции

Напомним, что дельта-функцией Дирака, сосредоточенной в точке $x_0 \in \mathbb{R}$, называется линейный непрерывный функционал δ_{x_0} на пространстве основных функций $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ (бесконечно дифференцируемых вещественнозначных функций на $\mathbb{R}$ с компактным носителем), действующий по правилу

$$\delta_{x_0}[f] = f(x_0).$$

С функционалом δ_{x_0} удобно обращаться как с ядерным функционалом, вводя фиктивное ядро – *дельта-функцию* $\delta(x-x_0)$, и записывая его действие в виде интеграла

$$\delta_{x_0}[f] \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0) f(x) dx = f(x_0).$$

4. Докажите следующие равенства:

а) $$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x), \quad \forall\, a \in \mathbb{R}\setminus 0, \quad a \neq 0.$$

б) $$\lim_{L\to+\infty} \frac{\sin Lx}{x} = \pi\,\delta(x).$$

Здесь предел понимается в слабом смысле, т.е. как предел линейных функционалов на пространстве основных функций $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

в) Пользуясь результатом пункта **б)**, получите равенство

$$\delta(x) = \lim_{L\to+\infty} \int_{-L}^{L} e^{ipx}\,\frac{dp}{2\pi}.$$

Символически этот предел записывается в виде

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx}\,\frac{dp}{2\pi}$$

и назвается Фурье-преобразованием дельта-функции. Данная формула позволяет говорить, что Фурье-образом дельта функции является единица (постоянная функция в пространстве Фурье-образов).

5. Пусть кусочно-гладкая функция $f(x)$ имеет разрывы первого рода (конечные скачки) в точках x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

а) Запишите обобщенную производную функции $f(x)$ с помощью дельта-функций.

б) Проиллюстрируйте общую формулу, найдя производную кусочно-гладкой функции следующего вида:

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 1 \\ x^2 + 2 & x \geq 1. \end{cases}$$

6. Докажите, что функция $f(r) = 1/|\vec{r}\,|$ удовлетворяет уравнению Пуассона с дельтаобразной правой частью:

$$\Delta \frac{1}{|\vec{r}\,|} = -4\pi\,\delta^{(3)}(\vec{r}\,), \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Здесь Δ — дифференциальный оператор Лапласа на пространстве $\mathbb{R}^3$, $\delta^{(3)}(\vec{r}\,)$ — трехмерная дельта-функция: $\delta^{(3)}(\vec{r}\,) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$, а приведенное выше уравнение интерпретируется как равенство обобщенных функций на пространстве $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$.