

НИС Геометрия и группы осенью 2019

(О.В. Шварцман)

Главная тема: тройки Маркова и гиперболическая геометрия

Задачи для подготовки к зачету

Если Вы студент-аргонавт, то все определения, нужные для понимания условий задач, можно найти в Интернете, а также на страницах книг:

Конвей, Квадратичные формы, данные нам в ощущениях.

Касселс, Введение в геометрию чисел.

Арнольд, Цепные дроби.

Шафаревич и Борович, Теория чисел.

Прасолов, Геометрия Лобачевского.

Советую посмотреть красивые картинки во втором файле. Второй файл – это наш НИС глазами студентов.

Задача 1. Пусть ω – вещественное положительное число. Предположим, что для бесконечного числа целых пар (p_n, q_n) , $q_n > 0$ выполняется неравенство $|\omega - p_n/q_n| < 1/q_n^3$. Доказать, что число ω иррационально.

Задача 2. Пусть \mathbb{Z}^2 – решетка на плоскости. Рассмотрим прямую через точку 0 с рациональным наклоном. Доказать, что проекция нашей решетки на указанную прямую является решеткой на ней. Верно ли это для прямых с иррациональным наклоном?

Задача 3. Докажите, что площадь параллелограмма, построенного на любом базисе решетки \mathbb{Z}^2 равна 1. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

Задача 4. Рассмотрим положительное число $\rho < (\sqrt{3})^{-1}$. Доказать, что найдется бинарная квадратичная форма отрицательного дискриминанта с числом Маркова, равным ρ .

Задача 5. Найти число Маркова для формы $X^2 - DY^2$ с натуральным D , свободным от квадратов.

Задача 6. Доказать, что число Маркова не меняется при целочисленной линейной унимодулярной замены переменных, а также при операции умножения формы на число.

Задача 7. Рассмотрим дерево троек Маркова (см красивый рисунок в файле рисунки). Верно ли, что в тройке, имеющей ровно трех соседей, все числа взаимно просты? попарно взаимно просты? Доказать или указать контр-пример.

Задача 8. Верно ли, что любое число Фибоначчи $(1, 1, 2, 3, 5, 8 \dots)$ встречается хотя бы в одной тройке Маркова. Тот же вопрос про числа Фибоначчи с нечетными номерами.

Задача 9-10. Построить ломаную Маркова для квадратичной формы $X^2 + XY - Y^2$, заданной в базисе $(1, 0), (0, 1)$ решетки, указать какойнибудь приведенный базис Маркова A_0, A_{-1} , ассоциированный с этой ломаной, и найти разложения в непрерывную дробь корней нашей формы в этом базисе.