

Классическая теория поля 2019.

Листок 4. Электромагнитное поле и излучение.

Срок сдачи: до 20 декабря

1. **Лоренцевы инварианты электромагнитного поля.** Рассмотрим тензор напряженности электромагнитного поля $F^{\mu\nu}$ и дуальный тензор

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} F_{\rho\lambda}.$$

Здесь $\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$ — полностью антисимметрический тензор четвертого ранга, $\varepsilon^{0123} = 1$.

- а) Выразите в терминах компонент векторов напряженности электрического и магнитного полей \vec{E} и \vec{H} лоренцевы инварианты $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ и $\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$.
- б) Выразите пфаффиан кососимметрической 4×4 матрицы $F^{\mu\nu}$:

$$\text{Pf}F = \frac{1}{8} \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} F^{\mu\nu} F^{\rho\lambda} = \frac{1}{4} F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}, \quad (\det F = (\text{Pf}F)^2)$$

в терминах компонент векторов \vec{E} и \vec{H} .

2. В некоторой системе отсчета существуют однородные и постоянные электрическое и магнитное поля, вектора которых \vec{E} и \vec{H} не параллельны друг другу. Докажите, что *почти всегда* существует инерциальная система отсчета, в которой эти поля будут параллельны и найдите скорость этой системы отсчета относительно исходной системы. Единственно ли решение задачи? В каком случае задача не имеет решения?

Указание. Рассмотрите лоренцевский буст вдоль прямой перпендикулярной к плоскости, натянутой на вектора \vec{E} и \vec{H} . Для поиска исключительного случая полезно воспользоваться лоренцевскими инвариантами, найденными в задаче 1.

3. Найдите пространственную плотность заряда, отвечающую сферически симметричному потенциалу следующего вида (потенциал Юкавы):

$$\phi(\vec{r}) = \frac{e^{-r/a}}{r}, \quad r = |\vec{r}|,$$

где a — постоянный положительный параметр. Потенциал ϕ — нулевая компонента 4-вектора $A^\mu = (\phi, 0, 0, 0)$.

4. В пространстве Минковского M_3 найдите запаздывающую функцию Грина для уравнения движения свободного безмассового скалярного поля:

$$\square G(x) = \delta^{(3)}(x), \quad G(x) \equiv 0 \quad \text{при} \quad x^0 < 0.$$

Здесь $\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$, а $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1)$ — метрический тензор в пространстве M_3 .

5. Точечный заряд $q > 0$ движется с постоянной угловой скоростью по окружности радиуса R вокруг закрепленного точечного заряда $-q$. Период обращения равен T . Определите среднюю за период обращения интегральную мощность дипольного излучения этой системы (то есть, суммарную мощность дипольного излучения по всем направлениям).