

Задачи для подготовки к экзамену по группам и алгебрам Ли

Экзамен состоится во вторник 17 декабря с 10:30 до 13:30 в ауд. 108. В каждом варианте будут задачи, похожие на некоторые из приведенных ниже.

1. Пусть G – группа ортогональных линейных преобразований \mathbb{R}^n , сохраняющих упорядоченную пару вложенных (одно в другое) подпространств размерностей 2 и 4. **а)** Найдите размерность группы Ли G . **б)** Найдите число компонент связности этой группы Ли.
2. **а)** Найдите все связные подгруппы Ли в группе аффинных преобразований прямой \mathbb{R} . **б)** Какие из них нормальны?
3. Найдите все идеалы (т.е. подпространства в алгебре Ли, замкнутые относительно всех операторов $\text{ad } x$) **а)** алгебры Ли строго верхнетреугольных матриц 3×3 ; **б)** алгебры Ли группы движений вещественной плоскости.
4. Найдите образ экспоненциального отображения для группы Ли из задачи 1 при $n = 5$.
5. **а)** Найдите центр универсальной обертывающей трехмерной алгебры Ли \mathfrak{a} , заданной в базисе как $[x_1, x_2] = 2x_2$, $[x_1, x_3] = -x_3 + x_2$, $[x_2, x_3] = 0$. **б)** Укажите какую-нибудь группу Ли с такой алгеброй Ли. **в)** Выпишите левоинвариантные векторные поля на этой группе Ли, соответствующие x_1, x_2, x_3 в каких-нибудь координатах в окрестности единицы. **г)** Выпишите меру Хаара на этой группе Ли в каких-нибудь координатах в окрестности единицы. **д)** Может ли такая группа быть компактной?
6. Пусть V_λ – неприводимое представление алгебры Ли \mathfrak{sl}_2 со старшим весом λ . Разложите в прямую сумму неприводимых представлений **а)** $S^2(V_5)$; **б)** $\Lambda^3(V_5)$.
7. Пусть E, H, F – стандартный базис алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Найдите все собственные значения элемента $E^2 F^2 H^2 + E^3 H^3 \in U(\mathfrak{sl}_2)$ в представлении алгебры Ли \mathfrak{sl}_2 со старшим весом 6.
8. Пусть E, H, F – стандартный базис алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Найдите все собственные значения элемента $E \otimes F + F \otimes E + \frac{1}{2}H \otimes H$ в тензорном произведении $V_5 \otimes V_4$ представлений алгебры Ли \mathfrak{sl}_2 .
9. Найдите все собственные значения элемента универсальной обертывающей алгебры $\sum_{i,j=1}^3 E_{ij} E_{ji} \in U(\mathfrak{gl}_3)$ в тензорном квадрате тавтологического представления $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$.
10. **а)** Вычислите характер неприводимого представления унитарной группы U_4 со старшим весом $\lambda = (3, 2, 1, 0)$. **б)** Выразите этот характер через элементарные симметрические функции.
11. Алгебра Ли \mathfrak{sl}_2 действует на пространстве $\mathbb{C}[x]$ операторами $E : f(x) \mapsto \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x)$, $H : f(x) \mapsto -\left(x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\right) f(x)$, $F : f(x) \mapsto -\frac{1}{2} x^2 f(x)$ **а)** Покажите, что это действительно представление алгебры Ли \mathfrak{sl}_2 . **б)** Является ли оно неприводимым?
12. Найдите кратность веса $(2, 2, 2)$ в представлении унитарной группы U_3 со старшим весом $\lambda = (4, 2, 0)$.
13. Найдите размерности неприводимых компонент в разложении на неприводимые представления U_3 в пространстве $S^2 \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$.